ISSN 1659 - 2921
1

CUADERNOS METODOLÓGICOS.

Los modelos jerárquicos lineales: fundamentos básicos para su uso y aplicación.

Raziel Acevedo Álvarez

IIP - UCR

LOS MODELOS JERÁRQUICOS LINEALES: FUNDAMENTOS BÁSICOS PARA SU USO Y APLICACIÓN

Serie Cuadernos Metodológicos. San José, CR.: Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica.

ISSN 1659-2921.

Acevedo, A., Raziel
Cuaderno Metodológico 1. Los modelos jerárquicos lineales: fundamentos básicos para su uso y aplicación. San José, CR.: Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica. 2008.

DEDICATORIA

A Ily, German y María José, quién sino ellos, la inspiración permanente de mi trabajo.

AGRADECIMIENTO

A nuestro gran amigo el Dr. José Luís Gaviria Soto y a su bella familia.

A la Dra. María José Fernández Díaz por ese apoyo incondicional en el desarrollo de nuestro trabajo.

Al Dr. Rafael Carballo por su aporte sustantivo.

A mis más queridos amigos Joaquín, Gema, Pilar, Juan y todos los del coro San José Obrero.

ÍNDICE

INDICE DE FIGURAS Y TABLAS

PRESENTACIÓN

Los modelos jerárquicos lineales son una metodología compleja y emergente, ubicada dentro de los procedimientos más novedosos de la estadística, para el estudio de los problemas de investigación que involucren una amplia gama de variables individuales y contextuales, ordenadas jerárquicamente de acuerdo con la teoría o por los intereses del investigador.

En este sentido, la metodología estudia los fenómenos sociales a partir de estructuras anidadas o multinivel. Es decir, se fundamentan en el pensamiento de que todas las manifestaciones sociales o problemas de investigación están conformados por diversos niveles o jerarquías, ordenadas de diferentes formas y de acuerdo con los intereses del investigador; por ejemplo: un modelo en dos niveles puede representar a pacientes en clínicas, en donde los pacientes serían el primer nivel y las clínicas, el segundo nivel. Otro modelo, se conformaría de votantes en cantones y éstos a su vez en provincias. Aquí impera un modelo de tres niveles: votante el primer nivel, cantones el segundo y las provincias el tercer nivel.

Estos dos ejemplos básicos permiten visualizar ordenamientos jerárquicos en modelos de dos y tres niveles, que van desde lo particular e individual hasta lo general o grupal. En este momento, nuestro lector dirá: pero se vislumbran muchos modelos. Claro, está en lo cierto, existen infinidad de estructuras jerárquicas y si concebimos los fenómenos sociales a partir de la lógica anidada, se observarán numerosos ejemplos en la vida cotidiana, en la formación de la sociedad y en los problemas de investigación. He ahí su importancia de aplicación, dado que se adaptan a un gran número de campos del saber, conformados a partir de estructuras anidadas.

Refriéndonos a sus ventajas y aplicaciones, la metodología ofrece: a) estimaciones a intervalos de confianza y pruebas muy precisas de los coeficientes de regresión y los errores estándar, b) herramientas robustas para explicar y explorar las diferencias entre las variables debido a la asociación con otros factores de un nivel superior, c) un detalle exacto de análisis de los diferentes ambientes en los que se desenvuelven los fenómenos sociales posibilitando el estudio de la realidad en diferentes niveles y entre los niveles. Dicho de otra forma, podemos estudiar las variables implicadas en la investigación de forma individual, colectiva y cruzada. Este singular hecho, no es posible con ningún otro tipo de análisis estadístico, de ahí su gran valor, porque acerca al investigador a la realidad estudiada con mayor precisión que los análisis tradicionales.

Ahora bien, cuando estas estructuras son aplicadas directamente en el campo de estudio, ofrecen la oportunidad de conocer y analizar en profundidad las características integradoras de los niveles, el efecto entre ellas y sobre todo sus residuales; ellas aproximan al investigador al fenómeno de investigación desde múltiples perspectivas, abriendo con ello, un panorama muy amplio del objeto estudiado: un hecho importante, pero imposible para otras metodologías y técnicas estadísticas. Quizás, ahí descansa su mayor aporte e importancia de aplicación en el campo de la investigación social, porque las estructuras sociales o humanas son muy complejas, con múltiples características y estratos. Con esa estructura tan compleja, es imposible realizar un análisis riguroso utilizando las técnicas estadísticas tradicionales.

Indudablemente, por su profundidad y capacidad de análisis, los modelos jerárquicos lineales requieren de ciertos conocimientos estadísticos previos para comprender los diferentes pasos, estimaciones y coeficientes utilizados en el proceso de análisis y formulación del modelo. De primera entrada, todo esto parece complicado y espinoso, muy duro para digerir, pero no lo es, no se requiere de una carrera universitaria en estadística o matemática para alcanzar un nivel adecuado en el manejo del lenguaje y de las estimaciones empleadas. Si bien es cierto, la metodología reúne una serie de procedimientos matemáticos muy difíciles de realizar manualmente, pero posibles con las computadoras actuales; el manejo de los cálculos digitales y del lenguaje es accesible, y cómodo, pero científico.

Pensando en el lenguaje y las estimaciones de la metodología, el texto que usted tiene en sus manos ha tratado, hasta donde ha sido posible, de mantener un nivel comprensible, básico, para que todas las personas interesadas en su utilización puedan llegar a operar con facilidad este lenguaje y lo utilicen en sus investigaciones futuras. De hecho es un libro muy básico sobre la metodología, que pretende motivar su uso entre los investigadores y no demostrar la complejidad matemática de los modelos jerárquicos lineales. Su función es más de carácter introductorio a la metodología; no obstante, se ofrece un panorama extenso que permite adquirir las destrezas necesarias para manejar con habilidad los modelos jerárquicos lineales. Las personas con conocimientos estadísticos y los interesados en profundizar el tema, pueden obviar los dos primeros capítulos y realizar las lecturas recomendadas para alcanzar un mayor grado entendimiento.

En el primer capítulo se presentan los conceptos elementales de los modelos jerárquicos lineales qué son: su uso, campos aplicación, los diferentes niveles y las terminologías empleadas por los investigadores. En el segundo, se introducen los conceptos fundamentales de regresión simple, el modelo nulo o el modelo más básico, los parámetros fijos y aleatorios. Se trata ante todo de una antesala de la estructura lógica sobre el cual emerge la metodología y es necesario, aprender la ecuación, su estructura y el significado de la simbología empleada, para entender básicamente la información ofrecida por el programa. La aplicación de todos los conceptos de este capítulo son los objetivos del tercero, donde se pone en práctica un modelo en dos niveles con algunas variables de nivel uno y nivel dos. Se trata de una propuesta empírica para utilizar los modelos jerárquicos lineales. Esta aplicación contiene pocas variables para que el lector no encuentre mayores tropiezos en su primer acercamiento. Un ejemplo con mayor grado de complejidad es contenido en el cuarto capítulo. En este se emplea un modelo en tres niveles con muchas variables contextuales e individuales. El ejemplo, también con datos reales, ofrece información sobre los estudiantes, las escuelas y los países a los que pertenece.

Los cuatro primeros capítulos hacen referencia directa a los modelos jerárquicos lineales, sin embargo el lector sólo conocerá la complejidad teórica, y no sabrá cómo manejar el programa MLwiN para hacer una estimación real. El capitulo cinco esta pensado con ese propósito, para que el lector pueda bajarse el programa y comenzar su estudio con la estimación de datos facilitados por los investigadores. En el capítulo seis encontrarán algunas páginas Web con el fin de informar sobre los principales sitios de interés que se pueden encontrar en línea. En ellos existe un fuerte proceso de trabajo con estos modelos y se encuentran artículos, ponencias y otros elementos que documentan la metodología. Las referencias bibliográficas y textos relacionados son incluidos en el capítulo siete.

Finalmente, aclaramos que este texto no es un documento profundo sobre la metodología ni tampoco un manual del programa MLwiN, pues se pueden encontrar muchos *on line*. Simplemente, pretende brindar una visión sintética de los elementos fundamentales sobre los cuales se estructuran los modelos jerárquicos lineales, a fin de proveer herramientas necesarias para ingresar sin dificultad a este apasionante mundo de análisis.

CAPÍTULO I
APROXIMACIÓN INICIAL

1. APROXIMACIÓN INICIAL

1.1. ¿Qué son los modelos multinivel o jerárquicos lineales?

Son una metodología de investigación cuantitativa, fundamentada en la idea de que considerables grupos de datos, incluyendo los datos de observación recogidos en las ciencias humanas y biológicas, tienen una estructura jerárquica o multinivel.

Para entender la lógica de ésta propuesta, imaginemos nuestra sociedad agrupada en niveles jerárquicos; por ejemplo un individuo pertenece a un barrio, ese barrio a un pueblo, ese pueblo a una provincia, esa provincia a una comunidad autónoma y así sucesivamente la sociedad se va edificando sobre diferentes niveles jerárquicos o multinivel. Dichas agrupaciones se ordenan desde lo individual hasta lo colectivo, permaneciendo los primeros con todas sus características, e inmersos en el contexto y las actividades de los segundos.

Pensando en organizaciones jerárquicas, podemos distinguir innumerables estructuras en los datos utilizados por las ramas del saber. Por ejemplo, en medicina se pueden organizar los datos por pacientes en clínicas y éstos en hospitales. En economía encontramos agrupaciones de ingreso por empresas, provincias o ingreso de las agrupaciones gremiales por lugares u otros.

A manera de ilustrar un poco estos sistemas jerárquicos, podemos observar la Figura 1 que destaca el ejemplo más común de estructura multinivel.

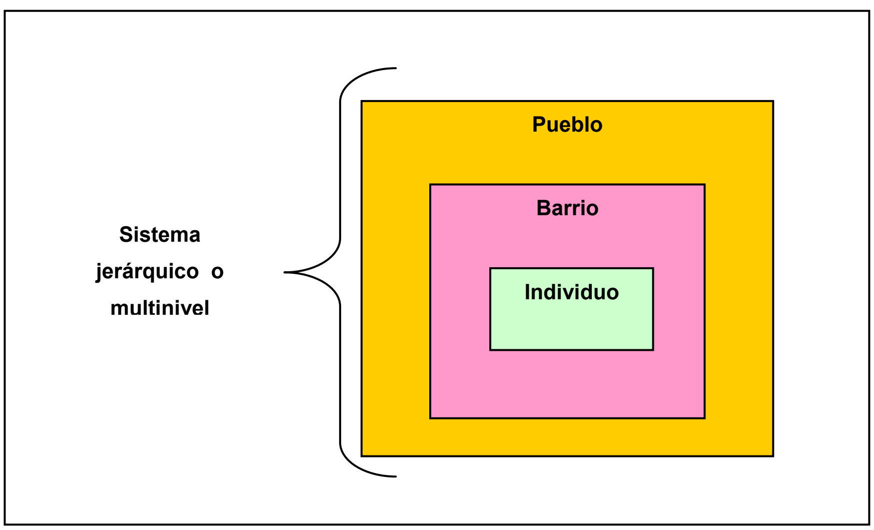


Figura 1. Sistema jerárquico o multinivel.

El ejemplo anterior muestra un sistema social jerarquizado en tres niveles: individuo, barrio y pueblo. Por tanto, un individuo o grupo de individuos pertenecen a un barrio determinado, donde conviven con otros individuos de similares características. En este caso ellos (los individuos) representan el primer nivel del estrato jerárquico o multinivel y el barrio de pertenencia el segundo nivel. Continuando con la estructura jerárquica del ejemplo, todos los barrios de un determinado lugar están ordenados en pueblos, o sea, el tercer nivel. Como se observa, la estructura alberga las unidades de micronivel (individuos) agrupándolas en el nivel macro (barrios o pueblos), de esa forma, cada individuo pertenece o se ordena dentro de una estructura de mayor tamaño.

En la observación de las estructuras sociales, Hox (1995c) afirma que un individuo interactúa permanentemente con su contexto. Las personas están influenciadas por los grupos de pertenencia y por las acciones de estos para trasformar la sociedad. En este sentido, existe una interrelación entre ambos y esto se puede estudiar solamente por medio de estructuras jerárquicas en dos niveles: individuos, el primero y el grupo, el segundo.

Otro ejemplo de estructuras jerárquicas o anidadas se contempla en las comunidades educativas. En estas, Plewis (1998) propone dos modelos básicos. El primero divide estudiantes dentro de una familia y estas a su vez insertadas en la comunidad. El modelo se compone de tres niveles: los estudiantes (primer nivel), sus familias (segundo nivel) y la comunidad (tercer nivel). Razonando la propuesta podemos considerar que los estudiantes viven generalmente en una familia, estas se hacen cargo de ellos y de sus necesidades, tanto afectivas como económicas y sociales. Las familias agrupadas son parte de una comunidad que unifica esfuerzos para su desarrollo y crecimiento. Por tanto, las familias serían el segundo nivel y las comunidades donde viven el tercero.

En el segundo ejemplo, se jerarquizan estudiantes en clases dentro de una escuela que depende de una autoridad de educación. La propuesta modela cuatro niveles: estudiantes, clases, escuelas y autoridades locales de educación. Entendiendo que los estudiantes (el primer nivel) se encuentran agrupados para su enseñanza en clases, donde son atendidos por un maestro o maestros (segundo nivel). Las clases pertenecen a una escuela específica (tercer nivel) con cierta cantidad de estudiantes, profesores, clases, recursos, etc; reunidos para la enseñanza/aprendizaje. En su estructura administrativa, las escuelas dependen de una autoridad de educación encargada de velar por su buen desempeño y por atender sus necesidades. Este sería el cuarto nivel.

Gaviria, Martínez, Castro y Murillo (1997) en los ejemplos de estructuras anidadas ofrecen varios: los estudiantes de los distintos niveles están anidados en las instituciones educativas; los que responden a las encuestas lo están en los entrevistadores; las unidades elementales de muestreo en otras de orden superior, como en el muestreo por conglomerados o los pacientes anidados en los hospitales.

Si continuamos buscando ejemplos, tanto en las ciencias sociales como en otras ciencias, observaremos muchos casos donde pueden utilizarse este tipo de agrupaciones para indagar en la realidad de estudio.

Ahora bien, ha de quedar claro que las características de las unidades de un determinado nivel se agrupan únicamente en el nivel pertenencia y no pueden ubicarse en otro porque no correspondería con el sentido de agrupación, pues estas son particularidades descriptivas muy específicas, las cuales distinguen plenamente las unidades de ese nivel. Por esa razón, la organización de los niveles jerárquicos ha de realizarse con mucho cuidado teórico. Sin embargo, durante la realización del análisis, las particularidades de cada nivel pueden interactuar con las especifidades del mismo nivel y además, influir en cualquier otro nivel; de esa forma se pueden conocer los efectos por nivel y entre niveles. Este singular hecho permite la posibilidad de realizar múltiples inferencias en los datos de estudio, brindando una mayor profundidad a la investigación, un hecho imposible para las metodologías tradicionales y un rasgo muy importante de los modelos multinivel.

Concebida la naturaleza multinivel o jerárquica de los fenómenos de estudio del investigador, estos modelos pueden ser empleados en poblaciones con estructuras complejas, porque la metodología soporta el análisis de la agrupación y de sus individuos en distintos niveles, haciendo posible la exploración del fenómeno de estudio en cada una de sus particularidades. En este sentido, organizando jerárquicamente los datos a observar individual y colectivamente, podemos conocer todos los procesos de interacción existente entre las diferentes variables integradoras del modelo propuesto.

1.2. ¿Cuando surgen?

Estos modelos aparecen a inicios de los años 70, como una nueva clase de estudios denominada i*nvestigación multinivel,* la cual supone una estructura jerárquica en los datos de determinada población. Durante esa década, se sientan las bases de la metodología con el surgimiento de diversos textos y aproximaciones teóricas referentes a las estructuras jerárquicas de los datos en las ciencias sociales. No obstante, el punto culminante de todo este desarrollo, según Bryk y Raudenbush (1992) llega a ser esquematizado de forma muy significativa en los trabajos de Lindley y Smith (1972) y Smith (1973), con la formulación de un modelo general para tratar los datos con estructura jerárquica lineal. El trabajo de estos investigadores desarrolla un marco general para datos anidados con una estructura compleja de error, lo cual es un gran avance para el fortalecimiento de la metodología.

Ahora bien, aunque la aportación de Lindley y Smith (1972) fue un hecho muy relevante, el estudio y el ajuste de estos modelos no fue operable durante esos años, debido principalmente a las herramientas básicas de cálculo utilizadas en las computadoras de la época, las cuales no podían ejecutar las complicadas estimaciones requeridas por la metodología. Por esa razón, hubo que esperar unos años hasta que los avances en computación permitieran hacer operable la propuesta matemática.

Hacia finales de la década, Dempster, Laird y Rubin (1977) conciben el algoritmo EM. Un hecho científico que proporciona una de las herramientas indispensables en el modelado de estructuras jerárquicas: la estimación del componente de covarianza en los datos anidados. Su contribución resulta ser un impulso sustantivo para la aplicación y el progreso posterior de la metodología.

Unos años después, Dempster, Rubin y Tsutakawa (1981) lleva su aporte teórico a la práctica empírica, bajo el enfoque de los datos con estructuras jerárquicas anidadas. Con este fuerte impulso, los años 80s son vitales para el progreso y aplicación de la metodología, los nuevos algoritmos introducidos por otros investigadores y las posibilidades ofrecidas por los ordenadores, facilitan significativamente las complicadas estimaciones matemáticas del modelado de estructuras jerárquicas logrando con ello captar el interés de los investigadores.

Una vez puesta en marcha la metodología, los primeros estudiosos preocupados por la aplicación de la nueva propuesta a sus estudios empíricos, pertenecen a la corriente de investigación llamada *escuelas eficaces.* Dentro de este marco, se etiquetan trabajos a partir del concepto genérico de calidad de los centros educativos, cuyos datos se obtienen de muestras de estudiantes, cursos, profesores, facultades etc. O sea, datos agrupados de forma jerárquica o multinivel. Dentro de esta corriente, otros estudios observan la eficacia de la educación en diversas áreas geográficas, considerando escuelas, distritos, regiones, provincias y países.

En la búsqueda de la eficacia de la acción educativa, se elaboran una serie de investigaciones multinivel muy relevantes que consolidan y demuestran la relevancia de la metodología multinivel o jerárquica. Dentro de estas aportaciones, se pueden destacar las investigaciones de Bryk y Raudenbush sobre la relación entre las características de la organización de las escuelas y variables relacionadas con la eficiencia del profesor o el aprendizaje de los alumnos. Con su trabajo proponen la necesidad de integrar los elementos contextuales encontrados alrededor de los estudiantes, familias e instituciones educativas, para explicar con datos jerárquicos el grado de logro de estas.

Posteriormente, otros autores como Goldstein (Inglaterra) y Hox (Holanda) emergen con sus trabajos sobre las estructuras anidadas y extienden los rangos de aplicación hacia nuevos campos científicos. Junto con ellos surgen una cantidad de publicaciones importantes como Bock (1989), Bryk, Raudenbush, Seltzer y Congton (1988a), De Leeuw y Kreft, (1986), Goldstein (1987ª); Goldstein (1987b), Rabash, Posser y Goldstein (1989), Van Den Eeden y Hüttnes (1982) [1]. Con estos trabajos se brinda un contexto científico trascendental que consolida definitivamente la metodología multinivel en los diferentes campos de la investigación cuantitativa.

Desde esa época y hasta la fecha, se han escrito múltiples estudios que atienden a diferentes ramas del saber. Además, se han formulado una variedad de procedimientos alternativos de estimación, como el método de MV (Mínima Varianza) completa o restringida, basada en el algoritmo *scoring* de Fisher, descrito por Longford (1987), o el de Goldstein (1987a) de mínimos cuadrados iterativos generalizados.

Dentro de esta evolución, cabe destacar la aportación de otros métodos estadísticos y algoritmos de importancia desarrollados simultáneamente y que permitieron un uso práctico de los tipos de modelos de regresión con coeficientes aleatorios anidados, como: Aitkin, Anderson y Hinde (1981); Laird y Ware (1982); Mason, Wong y Entwisle (1983); Raudenbush y Bryk (2002) y De Leeuw y Kreft (1986).

En la actualidad, la suma de todas las aportaciones teóricas y las posibilidades de cálculo que ofrecen los nuevos ordenadores han facilitado

[1] Si nuestro lector requiere de una mayor especificación acerca del desarrollo histórico de los modelos jerárquicos lineales, puede recurrir a los textos especializados como el de Longford (1993) y Kreft y de Leeuw (1998).

enormemente la estimación matemática de los cálculos generados por los modelos multinivel, lo cual ha generado una serie de programas sofisticados permitiendo con ello un mejor ajuste de los modelos y facilidad en el manejo. Dentro esta variedad de paquetes estadísticos se encuentran: VARCL de Longford (1988); HLM de Bryk, Raudenbush, Seltzer y Cognton (1988a); ML2 de Rabash, Prosser y Goldstein (1989); GENMOD de Mason, Anderson y Hayat (1988) y últimamente MLwiN 1.10 de Rabash, Browne y Goldstein (2000a y 2000b)[2].

1.3. Campos de aplicación de la metodología

En la actualidad, una gran cantidad de ramas del saber utilizan las estructuras anidadas o multinivel para el desarrollo y análisis de sus estudios, pues ellas son típicas en muchas ciencias, incluidas las ciencias sociales. Este amplio margen brinda un campo muy basto para su aplicación en las áreas más variadas, por ejemplo: educación[3], psicología[4], economía[5], sociología[6] y medicina[7], entre otros. Cada vez más, la metodología se difunde con mayor fuerza y en estos momentos existen una gran cantidad de campos del saber que la utilizan para sus investigaciones y estudios.

De los diferentes campos de aplicación, el sistema escolar es el más claro ejemplo de estructuras jerárquicas, con estudiantes agrupados en escuelas y estos en autoridades de educación. Dentro de estos sistemas educativos, Gaviria y otros (1997) destaca diferentes estudios:

a) aquellos que se analizan bajo la etiqueta genérica de calidad de los centros educativos, los datos obtenidos de las muestras de estudiantes, profesores, etc. y en la mayor parte de los casos se obtienen mediante muestreo por conglomerados, como unidades de muestreo, que son agrupaciones naturales de individuos;

b) los estudios sobre la eficacia de la educación en determinadas áreas geográficas (p.e. en los estudios transculturales) y del sistema educativo en general se basan en datos obtenidos sobre variables obtenidas en diversos niveles de agregación: estudiantes, clases, centros escolares, distritos, regiones, países, etc., que deben integrarse y combinarse en un modelo único;

c) en las evaluaciones de muchas intervenciones educativas y socio sanitarias, los datos suelen tratarse de forma agregada, tanto en los diseños clásicos pre/pos test, como en los de series temporales interrumpidas utilizando promedios de los grupos, a la hora de obtener estos promedios, el evaluador encuentra numerosos problemas derivados de las peculiaridades de los datos:

---

2 Exposiciones detalladas sobre el tema se pueden consultar en Kreft y De Leeuw (1998); Plewis (1997); y Hill y Goldstein (1998), siendo especialmente recomendable este último.

3 Rowan, Raudenbush y Cheong (1993); Bryck, Thum, Easton y Luppescu (1998a); Rowan, Raudenbush y Kang (1991); Duncan y Raudenbush (1998); Ting (2001).

4 Barnett, Marshall , Raudenbush y Brennan (1993); Barnett, Raudenbush, Brennan, Pleck y Marshall (1995).

5 Kreft y de Leeuw (1998); Hox (1995c).

6 Raudenbush y Sampson (1999); Sampson, Raudenbush y Earls (1997).

7 Fletcher y otros (1991); Pebley, Goldman y Rodríguez (1996); Leyland, Langford, Rasbash y Goldstein (2000); Albander y Goldstein (1992).

líneas de base inestables, enorme variabilidad intragrupal, necesidad de obtener el mismo número de medidas para todos los sujetos, etc.; las sucesivas medidas con las que se va registrando el cambio de los sujetos, están anidadas dentro de éstos y constituirían un primer nivel de análisis;

d) situaciones genéricamente encuadradas bajo la etiqueta de *medida del cambio*, que dan lugar a modelos de *curvas de desarrollo*, donde uno de los mayores problemas es el de las diferencias individuales, este ha sido uno de los temas más debatidos en la metodología de las ciencias del comportamiento.

Nosotros consideramos también que la metodología se puede utilizar en la asignación de pacientes a diversas clínicas, a la organización de un padrón electoral, cuya distribución se ordena por barrios, pueblos y ciudades, o en estudios económicos, fundamentados en el ingreso per cápita por ocupación profesional o actividad económica de la persona, su barrio y provincias. Otra posibilidad de aplicación puede ser en experimentos o ensayos clínicos realizados en varios centros con grupos de individuos elegidos aleatoriamente, ordenados por hospitales. También se puede incluir en estudios políticos relacionados con la influencia que ejercen los medios de comunicación masiva en el electorado.

Un breve resumen de los campos donde se aplica esta metodología se observa en la Figura 2.

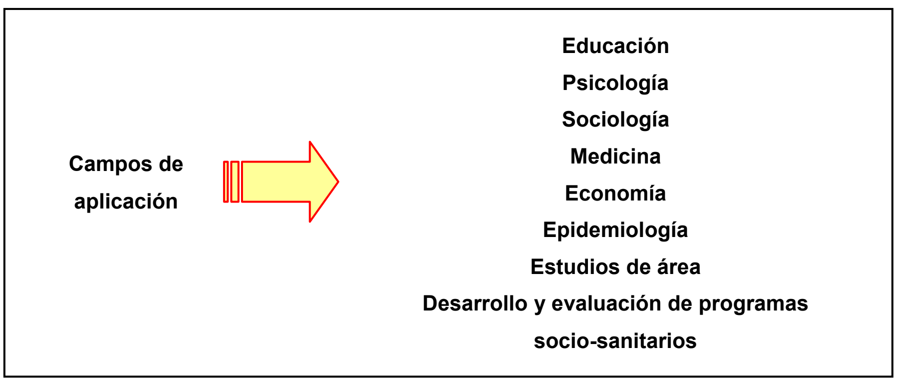


Figura 2. Campos de aplicación.

Como se observa, los modelos multinivel o jerárquicos lineales se utilizan en las más diversas áreas de investigación, demostrando con ello la versatilidad de la metodología para integrarse fácilmente en el análisis de los datos de las poblaciones más diversas.

Por este amplio rango de aplicación, el interés por los modelos jerárquicos lineales ha ido en aumento y ahora es posible observar numerosos esfuerzos académicos e institucionales para difundir y desarrollar la metodología en países como en el Reino Unido, Canadá, Australia y en Estados Unidos en la Universidad de Harvard, entre otros. En estos países impera un fuerte interés por fomentar su aplicación, crecimiento, desarrollo y profundidad de análisis, pues se ha demostrado que con su uso, las investigaciones pueden dar un paso más allá en la explicación de los fenómenos de estudio. Así mismo, es factible encontrar buena y mucha información en algunos sitios de Internet, relacionados con los profesores de estos centros de enseñanza e investigación. Las páginas cuentan con una importante bibliografía, enlaces, artículos y resúmenes de los trabajos más relevantes sobre este tema.

No hay duda que en la actualidad, los modelos jerárquicos lineales son una poderosa herramienta metodológica aplicada en numerosas ramas del saber a datos con estructuras anidadas.

1.4. Importancia de uso en los diferentes campos

El empleo de la metodología multinivel ofrece a los investigadores cuantitativos la oportunidad de conocer la realidad de estudio por nivel y entre niveles, permitiendo con ello, una mayor profundidad en el análisis del objeto de estudio. Dicho de otra forma, se observa y analiza el comportamiento de las variables que integran el fenómeno de estudio, en forma individual, colectiva y cruzada; y se hace uso de las características de todas las variables en sus diferentes niveles (micro y macro); lo cual distingue plenamente las particularidades de los sujetos y los elementos contextuales donde se desarrollan.

Introduciendo el contexto en el análisis se incrementa el número de inferencias posibles que se pueden realizar sobre un tema determinado, brindando con ello un elemento enriquecedor a la investigación. Este recurso, es básico cuando se quiere indagar la existencia o intensidad de determinados fenómenos a nivel micro, que están asociados con la intervención de un nivel superior. Por ejemplo: rendimiento de los estudiantes por escuelas, enfermedades cardiorrespiratorias por regiones, la eficacia del profesorado universitario, la mortalidad infantil y las enfermedades parentales o la inflación por países. Aplicando los modelos multinivel a éstos y otros ejemplos, se ofrecen mayores posibilidades explicatorias para analizar y explicar el fenómeno de estudio.

Sin embargo, pocas veces, por no decir nunca, la acción del contexto es tomada en cuenta, descartándose tales características de la investigación, aún a sabiendas que su influencia puede modular las acciones particulares y su exclusión del análisis puede conducir a errores en la interpretación de los resultados.

Sobre este tema, un ejemplo muy conocido es el estudio realizado por Bennett (1976) en las escuelas elementales durante los años 70s. En esta investigación se encontró que los niños instruidos por medio de los métodos formales de enseñanza en lectura, presentaban un mejor rendimiento que aquellos quienes no estaban sujetos a las prácticas cotidianas rutinarias. Para poder llegar a estas inferencias, los investigadores utilizaron las técnicas tradicionales de regresión múltiple las cuales reconocieron como unidades de análisis, exclusivamente a los niños, dejando al margen su contexto de agrupación, por ejemplo; por profesores, por clases y escuelas. Simplemente los investigadores analizaron los resultados observando únicamente la relación entre el rendimiento y el sujeto. El análisis de los datos reveló diferencias estadísticamente significativas, por la aplicación del método tradicional de lectura.

Posteriormente Aitkin (1981) replica el estudio de Bennett utilizando los datos de este, con la diferencia de que Aitkin toma en cuenta la organización de estos de acuerdo con el agrupamiento natural de los niños dentro de sus respectivas clases; delimitando de esa forma las unidades de análisis de primero y segundo nivel, para poder diferenciar y atender las particularidades de los sujetos de acuerdo con la clase de pertenencia. Al considerar el agrupamiento de los datos en las diferentes unidades de análisis a las que pertenecen, el nuevo estudio demuestra la inexistencia de diferencias en el rendimiento de los escolares a causa de aplicación del método tradicional de enseñanza. El hallazgo confirma que: a) las técnicas tradicionales no ofrecen suficiente información como para analizar profundamente el fenómeno de estudio; b) el ordenamiento de los datos por niveles aumenta la exactitud y disminuye el error de medida; y c) ninguno de los métodos de enseñanza utilizados por los maestros, produce efectos significativos en el rendimiento de los escolares. Este re-análisis es el primer ejemplo trascendental que pone en evidencia la importancia y la necesidad de aplicación de los modelos multinivel en las ciencias sociales.

Utilizar estructuras jerárquicas en las comunidades educativas y en otros sistemas, posibilita el análisis de los datos desde diferentes perspectivas; por estudiante, por la suma de sus efectos individuales, por clase, por escuela, por distrito o por estado. Cada uno de estos efectos es observable desde diferentes ángulos y son una colección de los múltiples efectos que produce el contexto y los individuos.

Además, los modelos multinivel cuentan con herramientas muy precisas que permiten el análisis cruzado, entre variables de nivel micro (individual) y macro (contextual), una característica única y fundamental de la metodología e imposible para las técnicas estadísticas tradicionales. La diferencia es notable y es su mayor logro. En este sentido, ninguna de las técnicas estadísticas anteriores cuenta con estimaciones tan exactas para todos los efectos (fijos y aleatorios). De ahí la importancia de su utilización y aplicación en las diferentes ramas del saber.

Acerca de la importancia de aplicación en los campos de investigación, diversos autores han destacado y demostrado su pertinencia en el análisis de los datos. A nuestro juicio, nos parece recomendable destacar algunas de las apreciaciones más claras y concisas tomadas de los más prestigiosos investigadores[8]:

- Gran parte de la población de interés de los científicos sociales cuenta con jerarquías o estructuras anidadas. Las mismas se encuentran claramente delimitadas en sus diferentes aspectos, por ejemplo: estudiantes en profesores y estos en escuelas, familias en pueblos y estados.

[8] Goldstein (2003); Raudenbush y Bryk (2002).

- Los modelos multinivel ofrecen un detalle preciso de análisis de los diferentes ambientes en los que se desenvuelven los fenómenos sociales, ya sea por nivel, por su interrelación con otros niveles o de forma simultánea.

- Revelan los pormenores del contexto social más profundamente de lo que lo hacen las técnicas estadísticas tradicionales; introduciendo de esa forma un grado de realismo que a menudo está ausente en otros modelos de nivel único como la regresión múltiple.

- Sin una estructura anidada o multinivel, muchos datos carecen de significado, pues reflejan parcialmente algunos elementos de estimaciones completamente descontextualizadas y erróneas.

- Las técnicas de modelos multinivel pueden ser aplicadas con gran precisión, en medidas con datos repetidos y con datos multivariados. Además pueden ser sumamente valiosas en situaciones donde existen datos perdidos.

- Las posibilidades del software multinivel son muchas. Algunas de ellas son: facilidad para construir y cambiar de modelos; estimaciones rápidas y precisas, claridad de resultados y nombre de las variables utilizadas.

- Con su empleo se ha logrado enfrentar los problemas con la “unidad de análisis” y con las “medidas de cambio”, ahora se puede plantear la hipótesis sobre las relaciones existentes en cada nivel y entre niveles, a su vez evaluar la cantidad de varianza existente en cada nivel.

Un resumen de lo expresado anteriormente se puede observar en la Figura 3.

Podemos añadir que los modelos multinivel tienen como objetivo balancear y entender tanto a los individuos como a su contexto social, por esa razón los estudios e investigaciones que descartan dichas características, presentan problemas de jerarquía y de interpretación en los datos. Un investigador no puede analizar las diferencias en la implementación de un tratamiento sin estudiar las características de los sujetos y su contexto, porque sin su contexto le será difícil considerar algún tratamiento específico que permita implementar una mejora en las actividades de los sujetos.

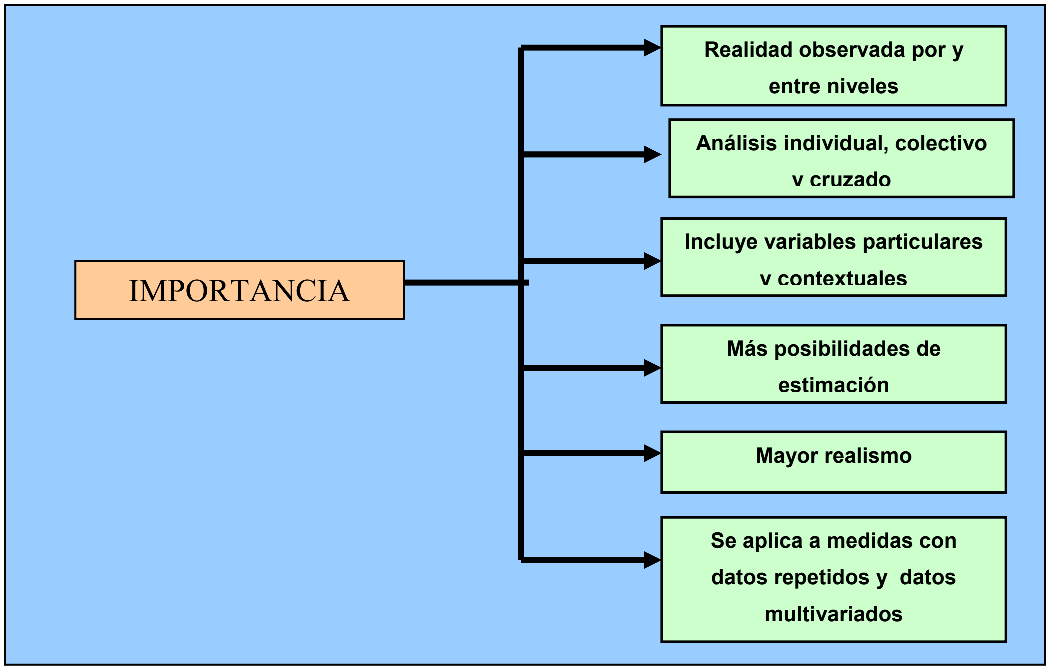


Figura 3. Importancia sobre su uso y aplicación.

Sobre este aspecto Goldstein y otros (1993) y Goldstein, Healy y Rasbash (1994) añaden que la importancia de los modelos jerárquicos lineales se fundamenta específicamente en que:

- Permiten obtener estimaciones estadísticas eficientes de los coeficientes de regresión.

- Utilizando los datos en niveles jerárquicos se puede conocer los errores estándar, a intervalos de confianza y con pruebas significación, más precisas que las obtenidas con los métodos tradicionales sin estructura anidada.

- Suministran herramientas para explicar y explorar que las diferencias entre las escuela puede deberse a otros factores como prácticas organizacionales o a las características individuales del alumno.

- Permiten un acercamiento para observar si la escuela marca diferencias para los diversos tipos de estudiantes. Por ejemplo, para ver si la variación entre las escuelas es mayor en aquellos estudiantes que tienen notas inicialmente altas, que para los estudiantes con notas iniciales bajas y si esas diferencias son mayores en algunos individuos que en otros.

Finalmente, el investigador interesado en profundizar en su fenómeno de estudio, debe perder el temor a esta rigurosa metodología e iniciar el modelado de estructuras jerárquicas, para lograr mayor precisión de estimación y de contextualización de las inferencias que obtenga en sus datos de estudio. Investigaciones que ignoren la estructuración multinivel de sus datos pueden carecer de: las variables independientes moderadoras de otros efectos no observables, exactitud en su interpretación y obtener resultados poco precisos, erróneos o descontextualizados de su sujeto de estudio.

1.5. Los niveles jerárquicos en el modelo

Si nos ponemos a reflexionar acerca de la cantidad de niveles de agrupación considerados para elaborar un modelo determinado, en principio y de acuerdo con la mayoría de los teóricos[9], no existe un límite establecido. Es más, en la literatura analizada por este autor no se encontró ninguna referencia en cuanto a la cantidad de niveles que deben ser incluidos en una investigación. Las propuestas estudiadas únicamente hacen referencia al análisis de los coeficientes, sus efectos y al modelado de las estructuras. Ninguna delimita o recomienda una determinada cantidad de niveles.

Sin embargo, en la práctica raramente se encuentran modelos con más de cuatro o cinco niveles. Son desconocidos para este autor los ejemplos que superan estas cifras. Quizá esto se deba principalmente a las complejidades técnicas enfrentadas cuando un modelo tiene un mayor tamaño y a la significación desmedida que implica delimitar una gran subdivisión de niveles. Así mismo, cuando el número de variables ofrece tamaños diferentes, existen un enorme número de interacciones cruzadas entre niveles, lo cual agudiza el problema de elaboración e interpretación del modelo. Por esa razón no imperan patrones con muchos niveles en la literatura especializada.

Los modelos más comunes en la literatura especializada, cuentan con dos o tres niveles para su desarrollo jerárquico. Esta cifra es observada en diversos trabajos realizados en el plano internacional[10] por los más variados autores. Dicha cantidad de niveles domina el panorama de aplicación de esta metodología y se ha convertido en la guía base para los demás investigadores, quienes generalmente no sobrepasan la estructura de tres niveles.

Por ejemplo, Ting (2001) en un estudio sobre la evaluación del docente universitario en China, construye un modelo en dos niveles, tomando en el primer nivel las características del estudiante, como: interés, expectativas, edad, años en la universidad. En el segundo incluye los determinantes del curso, como: tipo (ciencias duras o blandas), dificultad del curso, nivel, tamaño de la clase, profesor (experiencia, años de servicio). También Gaviria, Martínez y Castro

[9] Ver: Leyland y Goldstein (2001); Raudenbush y Bryk (2002); Raudenbush (1999); Kasim y Raudenbush (1998); Kreft y De Leeuw (1998); Goldstein y Rasbash (1996); Goldstein (1995); Goldstein y Healy (1993); y Longford (1993).

[10] Ver: Goldstein (2004); Leyland y otros (2000); Raudenbush y Bhumirat (1992); Bryk, Raudenbush, Seltzer y Congton (1998a); Ting (2001); Selner-O'Hagan, Kindlon, Buka, Raudenbush y Earls (1998); Sampson y otros (1997); Raudenbush (1997); y Kindlon, Wrigth, Raudenbush y Earls (1996).

(2004) con su estudio en Brasil emplea tres niveles. El primero lo componen las características de los estudiantes: raza, edad y horas de televisión. El segundo, las escuelas caracterizadas por: desarrollo de contenidos del profesor, utilización de libro de texto, recursos didácticos, tiempo de servicio, centro privado o no, estudios del padre. En el tercero se incluyen los estados al que pertenece la escuela.

Ciertamente, el límite para la elaboración de los niveles es algunas veces borroso y arbitrario, porque eventualmente la asignación de las variables no es siempre tan obvia y simple como se piensa; ello depende en gran medida de la profundización teórica del investigador, de su intuición y especialmente de su problema de investigación.

En los problemas multinivel, las decisiones acerca de los miembros del grupo y su operalización involucra un amplio rango de asunciones teóricas y de problemas específicos que muchas veces se complican cuando no se cuentan con propuestas teóricas muy sólidas. Por ello, es importante contar con buenos recursos teóricos, los cuales permiten una estructuración sólida del agrupamiento de las variables por niveles, de esa forma se considerarán todos elementos posibles de influencia e interacción.

Ahora bien, una vez establecidas las agrupaciones y sus niveles, incluso si su establecimiento es al azar, ha de observarse la distinción plena de cada nivel, es decir lo exclusivo. Ésta diferenciación implica que el grupo y sus miembros están completamente identificados en su nivel de pertenencia y sus componentes no pueden ser encontrados en otra parte del modelo. Hacer caso omiso de esta relación es arriesgarse a pasar por alto, la importancia de los efectos del grupo o del individuo y puede, también invalidar muchas de las conclusiones y hallazgos encontrados durante el proceso de análisis de datos; debido especialmente a que este método permite, no solo el análisis de cada nivel, sino también, el análisis de la interacción entre los niveles y sus características (Goldstein, 2003). Bryk y Raudenbush (1992) hablando sobre este tema advierten que la falta de profundidad en la organización, análisis de los niveles y sus interacciones ha llevado a la acumulación de sesgo, a reducir la precisión del cálculo y a problemas con la unidad de análisis, lo que “fomenta el empobrecimiento de la conceptualización” (p. 3); lo cual lleva al investigador a observar algunos problemas como insolubles, mientras en realidad lo que sucede tiene mayor relación con la falta de atención en la organización de las variables y sus niveles, que con la solución del problema en sí.

Por nuestra parte, recomendamos al lector iniciar el modelado de estructuras jerárquicas partiendo del modelo en dos o tres niveles siempre y cuando esto se ajuste a su posición teórica preliminar y a los objetivos de investigación, los cuales son al fin de cuentas, los elementos fundamentales sobre los que se toman todas las decisiones relacionadas con los niveles y sus variables.

1.6. Tipo de variables a introducir

Básicamente, no existe un límite respecto a la cantidad y al tipo de variables necesarias para distinguir los componentes de determinado nivel en un modelo de estudio. Como sabemos, en las investigaciones sociales no se manejan cifras definitivas y aunque se ha llegado a cierto nivel de convergencia, al reconocer algunas variables sobre determinados fenómenos, los datos con que contamos no son del todo concluyentes.

Ciertamente, las decisiones sobre las variables y su cantidad dependen en gran medida de la teoría que sustente la investigación y de los objetivos de la misma. Estos dos principios son claves en el proceso de jerarquización de los datos de estudio, pues brindan todo un contexto de referencia para delimitar la inclusión de la o las variables (tipo y número) y para la especificación de nuestro modelo de trabajo.

Ahora bien, a diferencia de otras técnicas y metodologías estadísticas, los modelos jerárquicos pueden trabajar con los dos tipos de variables conocidas, llámese continuas o categóricas. Las variables continuas están determinadas por todos aquellos valores posibles (positivos o negativos) en una determinada escala. Por ejemplo, el salario de un profesional costarricense es una variable continua porque puede ser desde 275 000 colones o 754 000 o quizá 1 348 000. Otro ejemplo de este tipo de variable pude ser las horas que un estudiante observa la televisión: una hora, dos, tres, cuatro o más de cinco. En fin, todo valor numérico consecutivo que represente el salario de un individuo, el ingreso bruto per capita de un país, el gasto de combustible, gas natural o agua en miles de litros por año, representa tipos de variables continuas.

Las variables categóricas hacen referencia a características o rasgos no cuantificables utilizados en una escala de trabajo para distinguir las particularidades de los sujetos o los grupos. De estas variables se conocen diversos tipos: a) dicotómicas, las que tienen dos categorías para su respuesta (p.e. género: varón o mujer; estudia: si o no); b) politómicas no ordenadas, las que distinguen tres o más rasgos, pero sin un orden determinante (p.e. tipo de religión: católica, judía, protestante, musulmán; tipo de trabajo: artesanal, profesional, técnico, diplomado; por grupo étnico: afro americano, africano, indígena, europeo, criollo, mestizo) o politómicas ordenadas, concretadas a partir de una escala específica (p.e. nivel de estudios alcanzado: escuela, secundaria, bachillerato, licenciatura, maestría y doctorado; estatus laboral: cargador de bodega, guarda, secretaria, ingeniero).

La inclusión de diferentes variables aumenta el grado de complejidad de las estimaciones y de las inferencias que se pueden realizar en un modelo de estudio. Así mismo, su empleo introduce mayores posibilidades explicativas de la variable dependiente, ampliando las perspectivas para la contextualización del estudio empírico, ofreciendo con ello un mayor realismo a la investigación.

Algunas veces en estos modelos, cuando se trabaja con variables categóricas, se debe trasformar la variable empleada en varias variables instrumentales, de manera que la información de la variable cualitativa pueda ser aprovechada en la explicación del modelo.

Por ejemplo, imaginemos un estudio en el que queremos incluir la variable estudios del padre, que tiene cuatro categorías: ESCOLAR, SECUNDARIA, UNIVERSITARIA NO FINALIZADA, UNIVERSITARIA FINALIZADA. Si la variable cuenta con cuatro categorías se elaborarán tres variables dicotómicas "instrumentales". De esa forma la variable ESCOLAR tomará el valor uno y el resto serán cero. De la misma forma las variables SECUNDARIA y UNIVERSITARIA NO FINALIZADA. No es necesario construir una variable para UNIVERSITARIA FINALIZADA porque la categoría estará identificada, porque estos sujetos son los que tienen asignado el valor cero en las otras tres variables.

Para visualizar mejor la variable "instrumentales" y sus valores hemos construido la Tabla 1.

Cuando nos referimos directamente a una categoría de la variable estudios del padre, ésta toma directamente el valor uno y las otras el cero. Por tanto, cuando convertimos una variable categórica en instrumentales, aumenta el número de variables instrumentales del estudio. En nuestro ejemplo pasamos de tener únicamente la variable ESTUDIOS DEL PADRE, a las variables ESCOLAR, SECUNDARIA y UNIVERSITARIA NO TERMINADA.

Los modelos jerárquicos lineales no tienen restricción en cuanto al tipo de variable independiente en el modelo, sea categórica o continua. En la propuesta del modelo es posible utilizarlas indistintamente para el modelado de las estructuras jerárquicas.

Tabla 1 Las variables instrumentales

CATEGORÍA	VARIABLE ESCOLAR	VARIABLE SECUNDARIA	VARIABLE UNIVERSITARIA NO FINALIZADA
PADRE ESCOLAR	1	0	0
PADRE SECUNDARIA	0	1	0
PADRE UNIVERSITARIA NO	0	0	1
PADRE UNIVERSITARIA FINAL	0	0	0

1.7. Terminología utilizada por la literatura

La literatura sobre esta metodología ofrece una variedad de términos utilizados por los autores, referidos a sus especialidades y su preocupación por el modelo de investigación. Por esa razón, a través de los años han aparecido varios calificativos como: modelos lineales multinivel[11]; modelos de efectos mixtos y aleatorios[12]; modelos de coeficientes aleatorios o al azar[13]; modelos aleatorios de coeficientes de regresión[14]. Desde nuestra óptica, cada calificativo hace referencia a uno u otro componente de la metodología, pero ninguno de estos logra abarcarla en su totalidad como para decantarnos a utilizar un término específico.

El calificativo *modelos jerárquicos lineales* fue introducido Lindley y Smith (1972), como una contribución a los métodos de estimación *bayesiana* de los modelos lineales. El término ha sido muy empleado por los más diversos investigadores, quienes reconocen la amplitud del concepto para abarcar todos los componentes incluidos en la metodología. Al respecto, Bryck y Raudenbush (1992) consideran que el término propuesto por Lindley "expresa un rasgo importante en la estructura de los datos que es normal en una amplia variedad de aplicaciones" (p. 3), por esa razón, recomiendan utilizar la expresión cuando se trabaje con los modelos multinivel.

[11] En inglés "multilevel linear models" por Bock (1989) y Goldstein (1987a,1995)
[12] En inglés "mixed- effects models y random models" por en Elston y Grizzle (1962) y Laird y Ware (1982).
[13] En inglés "random coefficient models" por Longford (1993)
[14] En inglés "random coeffecient regresión models" por Rosenberg (1973)

Por nuestra parte, consideramos conveniente el empleo del nombre modelos jerárquicos lineales para referirnos a la metodología, debido en primer lugar, a la recomendación anterior. En segundo, al amplio rango del concepto que acoge la mayoría de los términos empleados por los investigadores. Y finalmente, por su uso generalizado en la investigación educativa internacional.

A partir de este momento, en este texto se utilizará únicamente la expresión de modelos jerárquicos lineales cuando nos refiramos a esta metodología.

CAPÍTULO II
BASES TEÓRICAS DEL MODELADO JERÁRQUICO

2. BASES TEÓRICAS DEL MODELADO JERÁRQUICO

2.1. Fundamentos de la metodología

Los modelos jerárquicos lineales tienen sus raíces en las ecuaciones de regresión, generadas a partir de las propuestas matemáticas de Galton en el siglo XIX y Pearson a inicios del siglo XX. Esta técnica estadística se utiliza con relativa frecuencia en las ciencias sociales a partir de los años 40s y 50s del siglo XX, en investigaciones aplicadas a la demografía, estratificación social, sociología de la salud y análisis de los votos políticos durante las elecciones. En esos años, dos hechos fueron decisivos para la popularización del método en el campo de las ciencias sociales: a) se logró consumar con éxito los primeros esfuerzos sistemáticos de recopilación de datos, y b) dio inicio el desarrollo de las computadoras electrónicas. Ambos acontecimientos fueron componentes relevantes para proporcionar un impulso sustantivo a la técnica estadística.

Desde esa época hasta la fecha, el avance de la regresión ha permanecido cercano a las ciencias sociales y al desarrollo de la informática, en el perfeccionamiento de los cálculos matemáticos que acompañan el análisis. Los logros de una son los que facilitan el avance de la otra. En este sentido, la informática ha permitido a la regresión mejorar, ampliar y extender el proceso estimación y ajuste. Con ello ha suministrado a los modelos jerárquicos lineales las herramientas necesarias para acelerar los complejos cálculos de estimación, que de otra manera serían casi imposibles.

En síntesis, se puede manifestar que los modelos jerárquicos lineales son un estrato avanzado de los modelos de regresión, es decir, un paso adelante de lo que se podría esperar por el desarrollo natural de estos últimos. Por tanto, para comprender el procedimiento en toda su extensión es necesario conocer los principios básicos del modelo de regresión.

a) ¿Qué es una regresión?

Sintéticamente, podemos expresar que la regresión[15] es una técnica estadística que trata de explicar: a) la existencia de relación entre determinados fenómenos sociales, b) la intensidad del grado de asociación entre ellas, y c) su relación con otras características. En otras palabras, intenta descubrir los cambios producidos en una variable, con base en las variabilidades producidas por otra(s) variable(s). De esa forma se analizan las circunstancias que producen los hechos, su magnitud y los cambios simultáneos a los mismos. Su empleo puede posibilitar la realización de predicciones sobre la ocurrencia o no de la relación en un determinado fenómeno de estudio.

Por tanto, es una técnica estadística predictiva utilizada para especificar, estimar e interpretar un modelo explicativo, en el que una variable dependiente,

[15] Si nuestro lector conoce poco del tema, conviene revisar los textos de Guillén (1992), Etxeberria (1999) y Hair, Anderson, Tatham y Black (1999) para ampliar la conceptualización de los modelos de regresión. Los dos primeros han sido escritos en un lenguaje básico y ameno, con ejemplos muy claros para las personas con escasos conocimientos de estadística.

se estudia en función de una o más variables explicativas o independientes (regresión simple o múltiple[16]).

Dentro de esta perspectiva, la información aportada por la regresión cuantifica la relación entre las variables, a su vez establece un grado de confianza en las estimaciones realizadas con respecto a la realidad observada. Es decir, define entre otros, el grado de asociación entre las variables, el porcentaje de cambios que se deben a la variable independiente y la cantidad de varianza no explicada por la regresión. Cabe añadir, que ello no implica en forma alguna conocer las causas que producen o modifican tales acciones, por tanto, hablar de regresión no necesariamente significa referirse a causalidad y eso debe permanecer claro en nuestro pensamiento.

Veamos un ejemplo con datos figurados de un sistema educativo. Supongamos nos interesa conocer la relación entre el rendimiento educativo (variable dependiente) y el estatus socioeconómico (variable independiente), hipotetizando que los estudiantes con alto estatus socioeconómico muestran un mejor rendimiento.

Un estudio de esta naturaleza recolecta determinados datos ordenándolos en una base, agrupando las variables de acuerdo con las necesidades del investigador, referente entre otros: al número de sujetos, la puntuación obtenida en la aplicación o prueba (variable dependiente, explicada o criterio), y otra (s) característica (s) establecida (s) previamente en el estudio (llamadas variables independientes, explicativas o predictoras).

Tabla 2. Base de datos

Sujeto	**Rend. (*y*)**	**Ses (*x*)**
1	498,9	1
2	555,7	1
3	452,2	2
4	658.2	0
5	765,7	1
6	322,4	2
7	566,7	1
8	333,0	0
9	432,9	0
10	558,2	1
....	....	....
....	....	....

Ahora bien, geométricamente hablando las puntuaciones de cada uno de los sujetos puede ser fijada en un plano por medio del sistema de referencia

[16] Cuando en el estudio solamente participa una variable dependiente y una independiente, se le llama regresión simple. Pero, si se incluyen más de dos variables independientes, se considera regresión múltiple.

cartesiano[17]; compuesto por el eje de las ordenadas y el eje de la abscisa, como aparece en la Figura 4. .

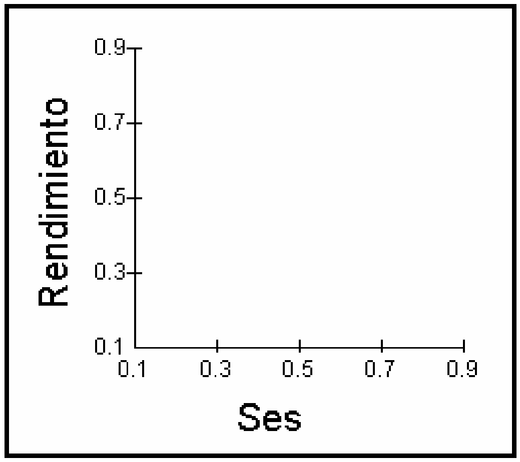


Figura 4. Eje de coordenadas.

Establecido el sistema de referencia geométrico, ya puede medirse numéricamente la posición de cualquier punto o sujeto en el plano. Por ejemplo, un punto introducido sobre cualquier parte, simboliza el rendimiento del sujeto asociado al estatus socioeconómico. De esa forma cada uno de los sujetos de la muestra, van a estar representados por un punto específico del plano.
Se imaginará el lector que si se representaran ahí el rendimiento y el estatus socioeconómico de todos los sujetos del estudio, la forma resultante sería una gran mancha en el plano de coordenadas, con muchos puntos al centro y unos puntos dispersos en sus alrededores, como se distingue en la Figura 5.

[17] Un sistema de dos ejes que se corta en un punto denominado origen de coordenadas, 0, designado numéricamente por (0,0).

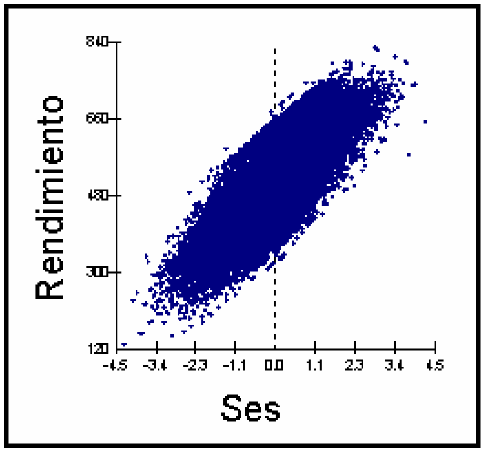


Figura 5. Nube de puntos

Ese bloque de puntos sobre el plano es llamado nube de puntos, pues el aspecto geométrico de la totalidad de sujetos es bastante similar a ella.

Antes de continuar con nuestro ejemplo, debemos recordar que la relación existente entre las variables de las ciencias sociales no es tan exacta como sucede en las ciencias físicas, que cuentan con herramientas precisas para la medición de sus fenómenos. No obstante, no olvidemos que es posible aproximarnos a los verdaderos valores de la variable dependiente utilizando una mayor cantidad de variables independientes o explicativas, sin embargo nunca, permitirá alcanzar un ajuste perfecto. Para tratar de estudiar la posible relación entre el rendimiento de un sujeto *i* (Yi) con el estatus socioeconómico (Xi), podemos expresar este fenómenos por medio de la función *x* e *y*, el cual lo representa en las coordenadas de un plano. Esta función se expresa así:

$$Y_i = f(X_i) + ei \qquad (1)$$

Donde ei representa las desviación o inexactitud de $f(X_i)$ con respecto a Y_i.

En nuestro ejemplo tratamos de explicar por qué los estudiantes tienen diferencias con respecto a su rendimiento en clase. De hecho, hemos propuesto que el estatus socioeconómico explica parte de las discrepancias en el rendimiento. Pero, ligadas al fenómeno de estudio existen muchas variables que también permanecen asociadas al rendimiento de los estudiantes. El hecho de que haya múltiples razones para explicar estos cambios, hace que sólo podamos efectuar aproximaciones en las explicaciones de las diferencias entre los sujetos, pero siempre queda otra parte sin explicar o de error.

Hasta este momento conocemos parte de la ecuación que asocia las variables de estudio, pero no sabemos aún el tipo de función $f(X_i)$ que las une, sea lineal, curvilínea o cualquier otra forma imaginaria.

Generalmente, en el ámbito de las ciencias sociales se asume la relación entre las variables es lineal[18], si es que no se dispone de otra información adicional, aún conscientes del riesgo corrido al partir de este supuesto y conociendo que otras funciones pueden ajustar mejor a la realidad de los datos de estudio Por tanto, la aplicación de la regresión supone una relación lineal entre las variables. Pero, al igual que el ejemplo de los puntos, cuando partimos del supuesto de linealidad contamos con una gran cantidad de líneas en el plano para representar el grado de asociación entre las dos variables, como se observa en la Figura 6.

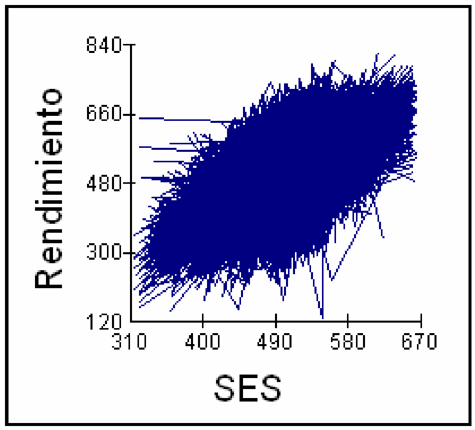


Figura 6. Rectas de regresión.

En este momento, nuestra mayor preocupación sería determinar cuál de todas las líneas dibujadas en el plano es la que mejor representa la relación entre las dos variables. Porque decidido el modelo, o sea una recta, debemos buscar en todas las rectas existentes aquella recta que mejor se ajusta a los datos.

Para tal efecto y debido a sus excelentes propiedades estadísticas, el procedimiento más utilizado para determinar la recta que mejor se ajusta es el criterio de mínimos cuadrados. Según Etxecheverría (1999), siguiendo este criterio es aquella que minimice el cuadrado de los errores cometidos en el ajuste. La estimación cuenta con un residual referido a una parte de la desviación a la media que no es explicada por la variable independiente, sino por otras variables externas al modelo. Este parámetro identifica la desviación entre el valor estimado por la regresión y el real. En este sentido, la recta de regresión bajo el criterio de mínimos cuadrados sería la que haga mínima la suma de todas estas diferencias al cuadrado.

[18] De acuerdo con Etxeberría (1999), la asunción de la linealidad puede “justificarse” por varias razones: a) numerosos estudios han comprobado empíricamente la linealidad; b) no se dispone de teorías que permitan asegurar o no la relación lineal; c) la representación gráfica de los datos no aporta claridad en la función y d) la especificación lineal es la más sencilla y parsimoniosa.

El calcular la recta en el plano supondrá calcular la ecuación en el plano que mejor se ajusta a la nube de puntos en la población de estudio. Veamos de manera gráfica la recta de regresión ajustada en la Figura 7.

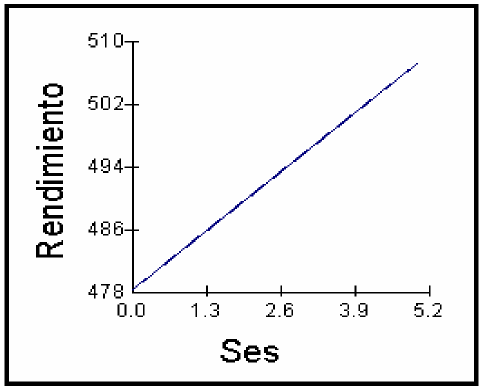


Figura 7. Recta que mejor ajusta.

Los programas informáticos de estadística cuentan en su diseños con ecuaciones sofisticadas para seleccionar la recta de regresión que mejor se ajusta, aunque se puede hacer de forma manual, a partir de ella realizan todas las predicciones del estudio. Una vez que se ha determinado la recta, las diferencias entre el valor estimado y el real son mínimas.

Recapitulando para explicar el grado de asociación entre dos o más variables, empleamos el modelo de regresión (simple o múltiple) fundamentado en el cumplimiento de los supuestos estadísticos[19]. Esta ecuación representa una recta entre la variable dependiente e independiente, expresada por:

$$\mathrm{Y_i} = \mathrm{a} + \mathrm{b} * \mathrm{X_i} + \mathrm{e}_i \tag{2}$$

$$(rend = a + b * ses + e_i)$$

Los símbolos de la ecuación representan:

Y_i El rendimiento del estudiante *i.*
a designa la ordenada en el origen (término constante)
b la pendiente.
ei residual, la parte no explicada por X

19 Para trabajar con la regresión y hacer las inferencias acerca de los parámetros estimados, se deben cumplir unos supuestos básicos o condiciones de aplicación. Estas son: 1. El modelo debe estar bien especificado. Debe existir una relación lineal entre la variable dependiente y las variables independientes. No han sido excluidas del modelo las variables importantes o en su defecto no han sido introducidas en él variables irrelevantes. Las variables han de ser independientes entre sí. 2. Las variables han de ser medidas sin error: la obtención de los datos ha sido efectuada a partir de mediciones precisas, cumpliendo estrictamente las disposiciones psicométricas referentes a fiabilidad y validez. 3. Los errores son aleatorios, no deben haber errores sistemáticos. Además, han de ser independientes entre sí y cumplir con el supuesto de homocedasticidad.

Ahora bien, interpretando el significado de ambos coeficientes a y b, con el ejemplo inicial diremos: *a* es la constante, el *rendimiento* medio de los estudiantes en caso que el *estatus socioeconómico* sea igual a cero. El parámetro *b* es la pendiente de la recta de regresión, expresa el incremento en el *rendimiento* cuando *estatus socioeconómico* aumenta una unidad o un punto. Por tanto, la ecuación representa el incremento en rendimiento del estudiante por cada unidad de aumento en su estatus socioeconómico.

Es muy conocida la imposibilidad en estadística para determinar el valor de *Y* (rendimiento) con exactitud perfecta a partir del valor de la variable *X* (estatus socioeconómico), porque este es un modelo probabilístico, dado que la correlación entre las variables no es igual a -1 o +1, por tanto, podemos decir que existe una parte de la variación de *Y* que no es observada mediante la variación de *X*. A esta parte no explicada de la variación se le llama error o residuo, definiéndose con las letras *ei*.

El residuo o error se refiere a las diferencias existentes entre el valor estimado por la predicción y el valor real. Por ejemplo, estudiantes con el mismo estatus socioeconómico alcanzan diferentes puntuaciones con respecto a su rendimiento, algunos consiguen calificaciones muy altas y otros muy bajas. ¿A qué se deben estas diferencias en la estimación? Bueno, lo mencionábamos anteriormente, la relación entre las variables no es exacta, la correlación no es perfecta, además, existen múltiples variables para explicar el mismo fenómeno. Por esa razón, al tratar de concretizar una ecuación de regresión para el ejemplo, ésta corresponde a la media de los estudiantes por el incremento del estatus socioeconómico más el residual o desviación.

Es necesario tener en cuenta que de nada sirven los resultados del ajuste de un modelo de regresión si no somos capaces de valorar cuál es el margen de error que se comete al hacer una predicción y observar las posibles desviaciones a las condiciones de aplicación del modelo de regresión. Para ello es necesario analizar su homocedasticidad, los casos atípicos y la normalidad de los residuos.

En todo el apartado hemos observado dos elementos de información en los modelos de regresión: uno referente al intercepto y la pendiente, llamado varianza explicada y otro, llamado residuo, error o varianza de error; la parte no explicada del modelo, referente a las diferencias entre la predicción y el valor real.

b) Otros modelos de regresión

A medida que profundicemos en nuestro objeto de análisis, los modelos van aumentando su complejidad y ofrecen mejores explicaciones de los fenómenos de estudio. Hasta el momento solamente nos hemos referido al modelo tradicional de regresión simple, pero este ofrece información parcial sobre la asociación entre el estatus socioeconómico y el rendimiento de los estudiantes en la escuela. Con el empleo de un modelo tradicional, no se reconocen aspectos fundamentales asociados al rendimiento de los estudiantes. Por ejemplo: a) la calidad del profesorado, b) la disponibilidad de materiales de trabajo, c) las escuelas a las que pertenecen los estudiantes, d) quizá parte de las diferencias detectadas en nuestro ejemplo con el modelo tradicional se deban más a las escuelas y no al estatus socioeconómico como se plantea en la hipótesis inicial. El rendimiento de los estudiantes puede variar de una escuela a otra, después de tener en cuenta el estatus socioeconómico. En otras palabras, estas preocupaciones y otras más, implican necesariamente modelos de regresión con mayor capacidad explicativa. Al hacer caso omiso del efecto de una nueva variable o de la escuela, en nuestro ejemplo, ofreceríamos información incompleta y potencialmente engañosa a falta del contexto institucional, llevándonos a inferencias erróneas sobre nuestro objeto de estudio o del rendimiento de los estudiantes.

Por esa razón, hemos de ampliar la capacidad explicativa del modelo básico de regresión a otro más complejo:

$$rend_{ij} = a_j + b * SES + e_{ij} \tag{3}$$

El nuevo modelo de regresión cuenta con dos subíndices, uno con la letra *(i)* referido a los estudiantes y otro con la letra *(j)* para identificar las escuelas a las que pertenecen. El subíndice *j* amplía la información acerca de los sujetos reconociendo e identificándolos de acuerdo con su centro de pertenencia.

El término *aj* inicial de la ecuación representa el intercepto. El estimador ofrece información acerca del rendimiento general de las escuelas, con ello hace la diferencia entre escuelas y no entre estudiantes, como lo señalaba el modelo simple anterior.

b SES* es el parámetro relacionado con la pendiente e indica el incremento o lo que aumenta el rendimiento por cada unidad de medida del estatus socioeconómico.

eij, identifica el residual o término de error, referido a las diferencias entre el valor estimado por la regresión y el valor real.

Este modelo es un modelo de regresión múltiple, más explicativo del grado de asociación entre nuestras variables, el SES, la escuela y el rendimiento de los estudiantes. En el modelo, el intercepto puede variar de escuela a escuela, identificando las rectas de regresión de la escuelas asociadas al estatus socioeconómico de los estudiantes, ofreciendo información sobre el rendimiento de cada una de las escuelas. No obstante, a pesar de las diferencias entre escuelas, las pendientes son constantes, el incremento por escuela es igual para todas ellas. Nuevamente falta información en la capacidad explicativa de la ecuación de regresión, por tanto, aún es necesario observar si algunas escuelas aumentan el rendimiento de sus estudiantes y otras por el contrario lo reducen. Ante esta posibilidad, existe la necesidad de replantear el modelo para profundizar en el estudio del problema de investigación.

Para atender estas diferencias, debemos elaborar un modelo más complejo, por ello debemos añadir ciertos elementos a la ecuación de regresión:

$$rend_{ij} = a_j + b_j * SES + e_{ij} \tag{4}$$

En este modelo se observan dos efectos, el que ya conocíamos *aj* y uno nuevo que se denomina *bj* es decir, el incremento en la pendiente de escuela a escuela. Ahora el modelo, más complicado y sofisticado, cuenta con mayor información sobre la relación entre las variables independientes, entre estatus socioeconómico y la escuela en el rendimiento de los estudiantes. Este modelo es más explicativo e identifica las diferencias en la media de rendimiento entre escuelas y su estatus socioeconómico, atendiendo la varianza en cada una de las variables.

Hasta el momento hemos visto a grandes rasgos varios modelos de regresión. Para aclarar un poco este tipo de estimación, Plewis (1998) plantea una excelente representación gráfica de los distintos modelos.

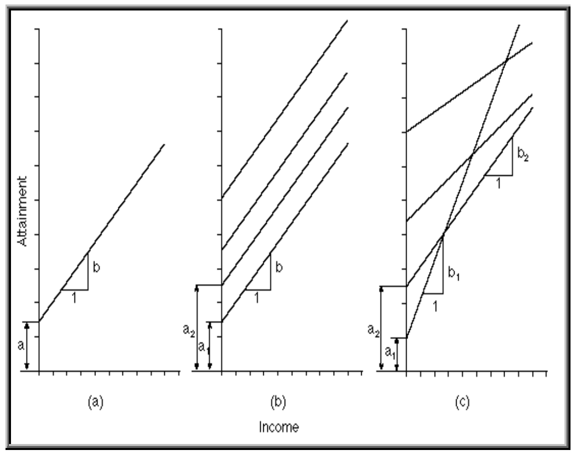


Figura 8. Grado de complejidad de los modelos de regresión.

A simple vista, el lector no especializado puede identificar el grado explicativo y la complejidad de cada uno de los modelos de regresión. Estos describen:

(a) el modelo de regresión simple, analizado en el apartado anterior; es el menos explicativo de los tres, pues solamente ofrece información del grado de asociación entre el estatus socioeconómico y el rendimiento de los estudiantes, sin brindar ninguna otra explicación adicional.

(b) determina los interceptos para las distintas escuelas. Reconoce un nivel mayor de anidamiento de los datos, debido a su organización por escuelas, no por sujetos: pero la estimación de las pendientes no varía, es constante para todas las escuelas, significando que el rendimiento es el mismo para todas las escuelas, no existe varianza entre ellas en relación con la pendiente.

(c) el panel correspondiente a un gráfico de un modelo multinivel, define los diferentes interceptos y pendientes para cada una de las escuelas de los estudiantes. Reconociendo la varianza existente entre ellas en asociación con la variable estatus socioeconómico; destacando que las escuelas pueden tener diferencias muy marcadas en cuanto a su rendimiento asociado al estatus socioeconómico. Puede ser que algunas escuelas se vean menos asociadas que otras al estatus socioeconómico, siendo más eficaces, pues dependen menos de factores externos para su rendimiento. Mientras tanto, algunas escuelas pueden estar muy asociadas al estatus socioeconómico y su rendimiento depende en extremo de este factor. De esa forma, aquellos estudiantes con un mejor estatus tienden hacia un mejor rendimiento en su institución educativa.

Conocidos y observados algunos modelos de regresión, podemos ingresar sin dificultad al estudio de los elementos fundamentales en los modelos jerárquicos lineales.

2.2. Modelo jerárquico lineal básico o modelo nulo

Los modelos jerárquicos lineales tienen diferentes formas de representación matemática, obviamente, a mayor profundidad teórica mayor complejidad de representación matemática y de estimación; por tanto, inicialmente es conveniente conocer el modelo más simple o modelo nulo para ir desarrollando otros más complejos.

El modelo simple o nulo no tiene predictores o variables independientes, únicamente cuenta con la variable dependiente y una constante para la estimación de los parámetros. En él se encuentran dos ecuaciones, atendiendo directamente a los niveles de trabajo, o sea dos niveles. De hecho no existen modelos con menos de dos niveles, pues la teoría se estructura a partir de dos.

Para introducirnos en el modelado de estructuras jerárquicas utilizaremos el empleado en los apartados anteriores, sobre el rendimiento académico de los estudiantes. El ejemplo cuenta con una estructura en dos niveles, el primero los estudiantes y en el segundo la escuela de pertenencia. El mismo se puede representar por medio de dos ecuaciones matemáticas.

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad (5)$$

$$\beta_{0j} = \beta_{00} + \mu_{0j} \qquad (6)$$

La ecuación de primer nivel es:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad (7)$$

Simboliza:

Y_{ij} es la variable dependiente observada en el nivel inferior o micro nivel, o sea, la unidad mínima definida por el investigador, en nuestro caso hipotético, el rendimiento del estudiante *i* (sea la nota de fin de curso; el resultado en un test de matemáticas o español; una prueba extra clase, etc) dentro de la escuela *j*. Notemos que desde el inicio la representación de los dos niveles; *i* para el estudiante y *j* la escuela de pertenencia.

β_{0j} corresponde al intercepto, el punto de partida de la recta en el plano. Para nuestro ejemplo, representa la media general de rendimiento de la escuela *j*. El valor del rendimiento medio de todas las escuelas de una muestra determinada puede ser un número negativo o positivo, Aún no ofrece información sobre el tipo de escuela o estudiante, únicamente expresa la información generalizada del rendimiento.

e_{ij} constituye el residuo o varianza residual, cuya media es cero y tiene una varianza σ_e^2. Representa las diferencias en el rendimiento de los estudiantes, entre el valor estimado por la regresión y el valor real. En su modelo más simple asume la varianza de error al azar, es la misma para todos los estudiantes.
Como vemos la ecuación hace referencia directa a los componentes descritos en el nivel uno de la ecuación de regresión, o sea, los estudiantes.

Analizada la ecuación de nivel uno, ingresamos a la de nivel dos:

$$\beta_{0j} = \beta_{00} + \mu_{0j} \qquad (8)$$

Es la ecuación de nivel macro referente a la información o características de las escuelas.

β_{00} representa el intercepto del nivel dos, la gran media general de todas las escuelas *j* incluidas en el estudio.

μ_{0j} es el residuo o varianza residual del nivel dos, la desviación del valor estimado para la escuela de su valor real. Tiene media cero y varianza $\sigma_{\mu_0}^2$. Cuando el puntaje de la desviación es alto indica que existe una marcada diferencia entre las escuelas.

Como observamos, el segundo nivel hace referencia directa a las escuelas y ofrece estimaciones de su media, con el respectivo residuo.

La información contenida en las ecuaciones, se condensa en una sola integrando los elementos de ambas, de esa forma se obtiene, una representación para las dos ecuaciones. La misma quedaría elaborada de la siguiente forma:

$$Y_{ij} = \beta_{00} + u_{0j} + e_{ij} \qquad (9)$$

Donde:

Y_{ij} Corresponde a la variable dependiente. El rendimiento del sujeto *i* en la escuela *j*.

β_{00} Identifica la gran media general del rendimiento entre las escuelas.

u_{0j} Es el residuo o varianza residual de segundo nivel (la escuela) y representa la desviación entre la media entre las escuelas; las diferencias de estimación entre la predicción y el valor real.

e_{ij} Hace referencia a la varianza residual del primer nivel: los estudiantes.

El primero de los coeficientes el β_{00} es llamado la parte fija del modelo. Los otros dos coeficientes, u_{0j} y e_{ij} representan las varianzas residuales denominada la parte aleatoria del modelo. Como se deduce, la ecuación de regresión del modelo nulo ofrece información sobre dos elementos, la parte fija y la aleatoria en la estructura jerárquica de los datos.

En la parte aleatoria del modelo sólo están las varianzas de los residuales. Los residuales no son parámetros del modelo, pero sus varianzas sí. Los residuales son las diferencias entre el valor que toma la variable dependiente para una unidad y lo que el modelo predice para esa misma unidad (sujeto o escuela). Hay tantos residuales de nivel uno como sujetos y tantos residuales de nivel dos como escuelas, pero esos no son parámetros, los parámetros son sus varianzas. Por tanto, cuando MLwiN ofrece los resultados de la parte aleatoria se refiere directamente a la varianza residual, no al residual.

Estimación del modelo nulo

Una vez conocido e identificado el modelo nulo y sus parámetros (fijos y aleatorios) se procede a estimarlo, a fin de observar si la proporción de varianza, sin explicar que queda entre los niveles, es estadísticamente significativa; lo cual permite continuar con la elaboración de modelos con mayor complejidad, en donde intervienen todas las variables independientes consideradas en nuestra propuesta de estudio.

El investigador cuyos datos no evidencien diferencias estadísticamente significativas con el modelo nulo, entenderá que éste carece de valor y de significado como para profundizar en el análisis los mismos.

Para construir un modelo nulo y estimarlo, el primer paso inicia con la elaboración de una constante, o sea, una nueva variable, cuyos valores son ajustados a uno (1). Redefinidos todos los valores, se le ubica en cada uno de los niveles jerárquicos propuestos, en nuestro caso dos niveles[20]. De esa forma ya contamos con una constante introducida en el modelo y se procede con su estimación.

Estimado el modelo nulo, contamos con tres productos de los parámetros de la ecuación:

β_{00} La media general de rendimiento

[20] El detalle práctico de la recodificación, elaboración e introducción de variables en el modelo se encuentra en el capítulo Nº 5

u_{0j} Varianza residual de nivel dos

e_{ij} Varianza residual de nivel uno

Cuando se estima el modelo con el programa MLwiN, cada uno de estos símbolos matemáticos es acompañado de un valor y de su respectivo error estándar, junto al resultado entre paréntesis.

Ahora bien, para conocer la capacidad explicativa del modelo nulo y analizar la proporción de varianza que queda sin explicar, ha de dividirse el producto de cada uno de los estimadores anteriores (β_{00} , u_{0j} , e_{ij}) entre su error estándar. El resultado de esta división ha de ser un valor mayor a $\pm$ 1.96. En caso afirmativo, nuestro modelo de estudio cuenta con suficiente varianza sin explicar como para continuar profundizando en el fenómeno de interés del investigador. Es pertinente ahora proceder a un análisis más sofisticado, introduciendo todas las variables del contexto seleccionadas previamente por el investigador.

Por el contrario, en caso que los resultados de la división propuesta sean menores a $\pm$ 1.96, no queda varianza sin explicar, siendo innecesario plantear un modelo alternativo. Ante este resultado, debemos cambiar o reconsiderar el modelo nulo, pues la inexistencia de variabilidad en los datos no permite seguir trabajando con este modelo.

Regresando a nuestro ejemplo, supongamos que todos los resultados encontrados en la división de los parámetros del modelo nulo son superiores a $\pm$ 1.96. En este sentido, el modelo explicaría gran parte de la varianza en las medias generales de rendimiento entre las escuelas y entre los alumnos; expresando: a) las escuelas difieren entre sí en cuanto a su rendimiento general y b) los alumnos también difieren entre sí en cuanto a su rendimiento en la clase. Podríamos señalar entonces que los resultados demuestran la existencia significativa de varianza en el nivel uno y dos. A partir de este momento estamos plenamente concientes de que el modelo deja mucha varianza sin explicar, justificando con ello el desarrollo de modelos alternativos para incluir las variables explicativas o independientes, para explicar las particularidades de cada uno de los niveles propuestos.

2.3. Los parámetros de estimación del modelo

La metodología emplea dos tipos de parámetros para hacer las estimaciones del objeto de estudio: a) los efectos fijos (intercepto, pendiente) y b) los efectos aleatorios y los componentes de varianza/covarianza. Ambos parámetros permiten obtener estimaciones del efecto observado y muestran información específica sobre cada una de las variables de estudio, el nivel de pertenencia y su grado de asociación con la variable dependiente.

Durante el proceso de estimación, cada parámetro depende el uno del otro, pues no son elementos aislados, sino integrados el uno del otro para mostrar las diferentes dimensiones a nuestro problema de estudio.

El valor denominado *efectos fijos* representa en su forma inicial al intercepto, o sea, planta el punto donde la recta de regresión corta al eje de ordenadas. En el caso que no haya variables independientes, es decir, en el modelo nulo, o cuando las variables independientes están centradas respecto a la media general, entonces el intercepto representa la media de la variable dependiente.

Ahora bien, cuando se introducen variables explicativas en el modelo aparecen otros efectos fijos denominados pendientes, los cuales representa, el incremento de la variable dependiente por cada unidad que aumenta la correspondiente variable independiente, *céteris páribus*. Por ejemplo, podríamos decir que el rendimiento medio en la escuela *j* se encuentra asociado al nivel socioeconómico. En este caso podríamos estudiar el grado de asociación entre el rendimiento y el estatus socioeconómico, para ver si el mayor o menor rendimiento se debe a este factor. En este caso el rendimiento sería el parámetro fijo o sea la media general y el estatus socioeconómico, la variable independiente, otro parámetro fijo o pendiente.

Los efectos fijos se representan en la ecuación matemática con las letras β_0, referida la constante y $\beta_1 X_{ij}$, $\beta_2 X_{ij}$, $\beta_3 X_{ij}$, etc. para las pendientes del modelo, las cuales simbolizan las variables independientes determinadas en el estudio, por ejemplo: estatus socioeconómico, estudios del padre, edad del hijo, aspiraciones, entre otros. Estos efectos cuentan con un componente que varía aleatoriamente en su respectivo nivel, llamado coeficientes aleatorios

Los *efectos aleatorios o al azar* son estimadores de la parte no explicada por el modelo y reúnen información de: los residuales, término de varianza residual y las estructuras de covarianza.

Los residuales de estimación se refieren a las diferencias existentes entre lo explicado por el modelo y el valor real obtenido durante la aplicación medida. Por ejemplo, podemos suponer que con nuestro modelo predecimos una calificación para un estudiante *i* en una escuela *j* de 485.65 puntos. No obstante, al consultar los datos reales sobre su rendimiento, el sujeto se encuentra por encima de la predicción, alcanzando una nota de 586.41 puntos. ¿Qué sucede? Encontramos una diferencia de 100.76 entre el pronóstico hecho por el modelo y el valor real obtenido por el estudiante. ¿Qué pasó? A estas diferencias se les llama residuales y son efectos aleatorios empleados en la estructura jerárquica para observar y analizar las divergencias entre lo estimado por el modelo y el valor real de la medida.

El componente de *varianza-covarianza* es un estimador que puede introducirse o no en el modelo. Los programas estadísticos de la metodología brindan esta posibilidad para integrarlos o no en la especificación del modelo. De hecho, muchas veces los investigadores introducen el parámetro en el modelo, pero cuando se realiza la estimación su valor no es significativo y debe ser excluido del modelo.

Cuando el valor de la estimación de una covarianza es negativo, se interpreta que estas diferencias se dan en forma más acusada en aquellos sujetos con un rendimiento más bajo. Por ejemplo, una covarianza negativa y significativa entre el estatus socioeconómico y el rendimiento académico, significa que la importancia del estatus socioeconómico es más grande en las escuelas que tienen rendimiento medio más bajo y menos importante en aquellas escuelas que tienen rendimientos medios más altos. En los estudiantes de las escuelas con alto rendimiento medio, el estatus socioeconómico estaría menos asociado a su rendimiento que en los demás sujetos.

Para realizar los cálculos de los *efectos aleatorios* los investigadores han propuesto diferentes estimadores, como el de máxima verosimilitud[21], el método de máxima verosimilitud restringida [22] y el método de estimación bayesiana[23], pero son elementos lejanos a este texto.

Un hecho relevante a tomar en cuenta es que a cada variable independiente del modelo le corresponde un residuo en la ecuación. Con ello se logran intervalos de confianza y pruebas significación, más precisas que las obtenidas con los métodos tradicionales.

2.4. El modelo en tres niveles

Ahora estamos en la capacidad de entender modelos más complejos, con mayores posibilidades explicativas a nuestro problema de estudio. Los modelos jerárquicos lineales en tres niveles son una extensión del modelo básico explicado en los párrafos anteriores, al cual se añade un nivel más, el tercero. Esta inclusión permite aumentar la capacidad explicativa del modelo y a su vez, incrementa la complejidad matemática de las ecuaciones, las cuales involucran una serie de elementos de cálculo que solo es posible con las computadoras y los programas específicos de la metodología multinivel.

Un modelo en tres niveles, por ejemplo, puede estar constituido por estudiantes anidados en clases y éstas en escuelas. El nivel uno del modelo representa las relaciones entre las variables de nivel del estudiante, el nivel dos captura la influencia de los factores determinantes de la clase y el tercero, incorpora los efectos del nivel de las escuelas. Hipotéticamente, podemos destacar que la existencia de varianza entre las escuelas indica que se

21 Longford (1987) y Goldstein (1986)
22 Mason (1983) y Raudenbush y Bryk (1986)
23 Dempster (1981)

diferencian en su rendimiento. La varianza en el segundo nivel establece que las clases también difieren en el rendimiento medio de cada una de ellas dentro de las escuelas y la varianza en el nivel uno (los estudiantes) indica que los estudiantes muestran diferente rendimiento en clase. Claro está, el modelo asume una distribución jerárquica de los datos y la existencia de una variable dependiente: el rendimiento del estudiante.

Al describir y definir las características de los niveles, matemáticamente podríamos representar el modelo nulo de la siguiente forma:

$$y_{ijk} = \beta_{ojk} + e_{ijk} \tag{10}$$

$$\beta_{0jk} = \beta_{0k} + u_{ojk} \tag{11}$$

$$\beta_{ok} = \beta_{00} + v_{ok} \tag{12}$$

Nótese que los dos niveles iniciales son similares a los estudiados en los párrafos anteriores, con la diferencia de la inclusión de una tercera letra, la cual indica un nivel más, o el tercero.

Las letras representativas de las características de nivel se pueden definir en nuestro ejemplo hipotético de la siguiente forma:

$i = 1,2,3\, n_{jk}$ unidades de primer nivel, los estudiantes.

$j = 1,2,3\, j_k$ indican las unidades de nivel dos, las clases.

$k = 1,2,\, k$ se refieren a las de nivel tres, las escuelas.

Conocidos los elementos de cada nivel, podemos detallar sus elementos específicos:

Y_{ijk} variable dependiente, el rendimiento medio del estudiante *i* de la clase *j* en la escuela *k.* La escritura de la variable pone de manifiesto la cantidad de niveles del modelo jerárquico, por ello recomendamos observar cuidadosamente sus componentes.

β_{0jk} representa la media general de rendimiento del estudiante *i* en la clase *j* de la escuela *k.* Este parámetro identifica el rendimiento medio de los estudiantes de una determinada clase dentro de una escuela.

El parámetro siguiente, β_{0k} incorpora la media de rendimiento de las clases *j* en la escuela *k*; este elemento identifica el rendimiento general de las clases dentro de la escuela. Claramente se puede observar clases con un rendimiento general alto y otras, por el contrario, bajo. Nótese que aquí estamos hablando solamente del segundo nivel, las clases.

β_{00} define el rendimiento general de las escuelas e indican la media general de rendimiento entre las escuelas *k.* Este elemento informa sobre el nivel macro de la ecuación.

Los parámetros identificados hasta el momento hacen referencia a la parte fija del modelo, a la medida sin error.

La parte aleatoria de la ecuación, o sea, los elementos de error en la medida son representados por:

v_{0k} es un efecto al azar de tercer nivel, el residuo o varianza entre el valor estimado para la escuela y su valor real, asumiendo que el efecto tiene una distribución normal cuya media es 0 y varianza $\sigma^2_{\mu_{0k}}$ $[v_{0k} \approx N(0, \tau_\beta)]$

u_{0jk} es el efecto al azar de la clase, o sea segundo nivel, identifica la desviación de la clase *j* de escuela a escuela *k*, con media cero y $\sigma^2_{\mu_{0jk}}$. Al igual que el parámetro anterior se asume que el efecto $u_{0jk} \approx N(0, \tau_\pi)$

Finalmente, e_{ijk} es el residual de nivel uno, los estudiantes. Es un efecto aleatorio que determina la desviación del rendimiento del estudiante *i* en la clase *j*, respecto a su valor real. El efecto asume que tiene una distribución normal cuya media de 0 y varianza (σ^2_e).

La ecuación de tercer nivel puede ser integrada en una sola definida por:

$$Y_{ijk} = \beta_{0ijk} + v_{0k} + u_{0jk} + e_{ijk} \qquad (13)$$

No describiremos la ecuación porque representa los mismos elementos descritos en los párrafos anteriores en cada uno de sus parámetros. Como observará nuestro lector, cada vez que se incluye un nivel más, aumenta la cantidad de parámetros a estimar, volviendo más compleja su explicación matemática. No obstante, a mayor cantidad de niveles, se incrementan las posibilidades explicativas del modelo y puede atender a aspectos más profundos del tema de investigación elegido.

2.5. La varianza en el modelo

Bueno, si queremos conocer la proporción de varianza explicada por el modelo nulo o de otros más complejos con variables explicativas, se pueden realizar unos cálculos sencillos con los resultados obtenidos en los efectos aleatorios. Simplemente, para dicho propósito ha de guiarse por el conjunto de formulas recomendadas en Bryk y Raudenbush (1992).

En la partición de la varianza, los autores consideran importante iniciar los cálculos con los índices del modelo nulo. Por ejemplo un modelo con tres niveles tendría los siguientes: e_{ijk} , μ_{jk} y μ_{0k} . Sustituyendo los símbolos por los valores relativos, se puede proceder con la estimación de la varianza en cada nivel del modelo empleado; de esa forma obtendremos diferentes coeficientes por nivel jerárquico del modelo de estudio.

Para analizar la proporción de varianza explicada por nivel:

$\sigma^2 / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta)$ es la varianza explicada por el modelo entre las clases, o sea, primer nivel.

$\tau_\pi / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta)$ corresponde a la proporción de varianza de las clases entre las escuelas, segundo nivel.

$\tau_\beta / (\sigma^2 + \tau_\pi + \tau_\beta)$ es la referida entre las escuelas, o sea, el tercer nivel.

El símbolo σ^2 corresponde al valor obtenido en la estimación de e_{ijk} ; el T_π a la μ_{jk} y el T_β al de μ_{0k} .

El producto de cada una de las ecuaciones precisa el porcentaje de varianza explicada en el nivel correspondiente, permitiendo con ello determinar la cantidad de varianza que aporta cada nivel al modelo de estudio.

Correlación intraclase

La correlación intraclase denominada con "ρ" puede ser conocida por medio de la ecuación:

$$\rho = \sigma_{00} / (\sigma_{00} + \sigma^2) \qquad (14)$$

Leyland y Goldstein (2001) indican que la correlación *p* intraclase es un estimado de población de la varianza explicada por la estructura del grupo, ello es igual a la proporción estimada del nivel de varianza del grupo comparada con el estimado total de varianza.

CAPÍTULO III
PROPUESTA EMPÍRICA EN DOS NIVELES

3. EJEMPLO PRÁCTICO DE LA METODOLOGÍA

Este capítulo está fundamentado en un modelo con dos niveles, con datos reales de un estudio realizado en el 2003 en diferentes escuelas y países. De los participantes se ha recolectado una muestra de 10 274 escuelas y 276 165 estudiantes, pero para este ejemplo de estudio solamente se han empleado los datos de 383 escuelas y 48 347 estudiantes.

3.1. Un modelo en dos niveles

Para poder enfrentar un estudio de esta naturaleza, lo primero es definir el modelo, decidiendo entre dos, tres, cuatro o cinco niveles. Nosotros como primer ejemplo utilizaremos dos niveles: el primer nivel para el estudiante y el segundo para la escuela de pertenencia.

Considerados los niveles, determinaremos la variable dependiente, en este caso el *rendimiento en matemáticas.* Como variables explicativas de primer nivel introduciremos: estructura familiar, interés del estudiante por las matemáticas, habilidades y tiempo dedicado a las tareas. Las variables explicativas o independientes de segundo nivel estarán descritas por la titularidad del centro (privado o público), sus recursos y el currículo del centro.

Planteado el orden jerárquico, podemos formalmente escribir el modelo nulo del estudio:

$$Y_{ij} = \beta_{00} + u_{0j} + e_{ij} \qquad (15)$$

Donde

$i = 1,2,3_{ij}$ son las unidades de primer nivel, o sea, los estudiantes.

$j = 1,2,3_{j}$ las unidades de segundo nivel, las escuelas

Así tenemos:

Y_{ij} es el rendimiento en matemáticas del estudiante "*i*" en la escuela "*j.*"

β_{00} representa la media general en el rendimiento entre las escuelas.

u_{0j} determina la varianza residual, conocida como la desviación media de la escuela "*j*" respecto de la puntuación real, asumiendo una distribución normal cuya media es cero y varianza $\sigma^2_{\mu_0}$. Asume un efecto de $u_{0j} \approx N(0, \tau_{\pi})$

e_{ij} varianza residual en el primer nivel. Es un efecto que expresa la desviación en el rendimiento de los estudiantes. En otras palabras, las diferencias halladas entre el valor estimado y el valor real. El efecto asume una distribución normal cuya mediados de 0 y varianza $\sigma_e^{\ 2}$.

Al identificar el modelo de trabajo, nuestro siguiente paso será conocer si los datos de la muestra ofrecen la suficiente varianza sin explicar, como para justificar con ello la inclusión de las variables explicativas o independientes.

3.2. Análisis del modelo en dos niveles

a) Estudio del modelo nulo

El análisis del modelo nulo permite observar si los datos extraídos de la muestra dejan mucha varianza sin explicar entre los niveles. Para ello, lo primero es introducir los datos en el programa MLwiN 1.10 y luego proceder a la estimación de los parámetros. Una vez considerada la significatividad de estos, se determina si el modelo nulo en dos niveles, ofrece la suficiente varianza como para trabajar con un modelo más complejo, que incluya variables explicativas. En caso de no existir diferencias entre los niveles, se debe reconsiderar el modelo y elaborar uno nuevo.

Empleando el programa MLwiN 1.10 se realiza la estimación del modelo nulo. Los resultados de la estimación son contenidos en la figura 9.

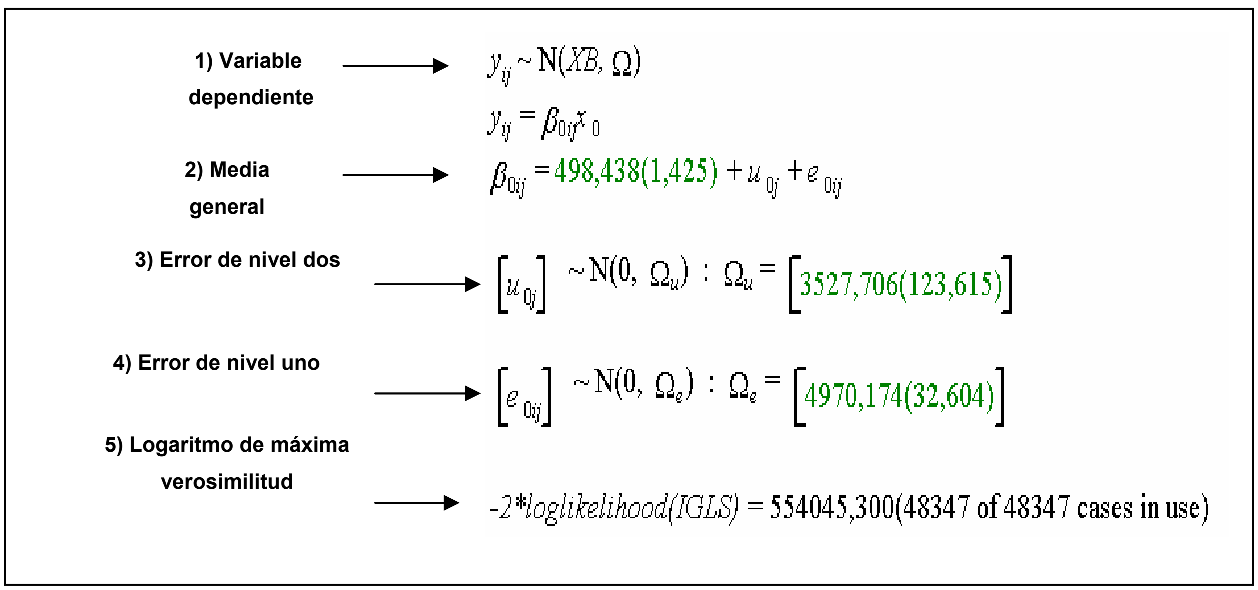


Figura 9. Modelo nulo en dos niveles

No se asuste con el gráfico, sabemos que es la primera vez que observa un detalle de resultados del programa MLwiN 1.10, por tanto, explicaremos cada una de las estimaciones a fin de familiarizarnos con ellas. En el gráfico, se contabilizan cinco elementos de estimación para este modelo en particular. No obstante puede existir mayor cantidad de información, seis o más parámetros, pero depende del modelo y la cantidad empleada de variables independientes.
Para efectos de este modelo detallaremos, los cinco elementos de la Figura 9:

1.- Hace referencia a la variable dependiente, en este caso el rendimiento del estudiante *"i"* en la escuela *" j".* Aquí solo se informa sobre la construcción de la variable dependiente y la cantidad de niveles.

2.- Destaca parte de la ecuación en los dos niveles de nuestro modelo de estudio. Evidentemente, este componente puede expresar ecuaciones más complejas, pero depende en todo caso del modelo de análisis elegido y de la cantidad de variables incluidas. Junto con la ecuación, aparece un número referido a la media general, o sea, β_{00} = 498,43 (s.d. 1,42). A efectos de este estudio, la escala utilizada para valorar el rendimiento del estudiante parte de 120 hasta 800. En este caso concreto la media general de rendimiento en matemáticas de los estudiantes es alrededor de los 500 puntos.

3.- Es un valor aleatorio y muestra la varianza residual de nivel dos, o sea, las diferencias existentes entre las escuelas $\sigma^2_{\mu_0}$ = 3527,70 (s.d. 123,61).

4.- $\sigma^2_{e_{0ij}}$ = 4970,17 (s.d. 32,60), representa la varianza residual de nivel uno y considera las discrepancias en el rendimiento de los estudiantes respecto de su escuela.

5.- La última de las estimaciones es el valor del logaritmo de máxima verosimilitud. Contiene información adicional para determinar la capacidad explicativa del modelo propuesto por el investigador, para compararlo con otros modelos más complejos. En este momento no vamos a entrar en los pormenores del valor, posteriormente explicaremos en profundidad la información ofrecida por el índice, ahora solo observaremos su número 554045,30 con 48847estudiantes de muestra.

Definidos los cinco elementos de información detallados en la Figura 9 procedemos a analizar la significatividad o no del modelo, con el objeto de estudiar la posibilidad de incluir las variables independientes del estudio, para profundizar en la investigación o desecharlo y elaborar un nuevo modelo.

Para conocer la significatividad de la estimación se procede a:

$$\frac{\beta_{00}}{sd} => +1.96$$

Sustituyendo queda

$$\frac{498{,}43}{1{,}42} = 351{,}00 > \pm 1.96$$

Obsérvese el resultado de la ecuación 351 es mayor a $\pm$1.96 (numeración establecida por los investigadores para demostrar la significatividad del valor) por tanto, β_{00} o la parte fija del modelo, es totalmente significativa.

Prosiguiendo con el análisis, debemos estudiar ahora los valores de la parte aleatoria para comprobar su significatividad. Se procede con la división de cada uno de ellos ($\sigma^2_{\mu_0}$ y $\sigma^2_{e_{0ij}}$), entre su respectiva desviación estándar. Así tenemos:

Segundo nivel:

$$\frac{\sigma^2_{\mu_o}}{s_{\sigma^2_{\mu_o}}} => + 1.96$$

Sustituyendo por los valores.

$$\frac{3527{,}70}{123{,}61} = 28{,}53 > \pm 1.96$$

Primer nivel

$$\frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{s_{\sigma^2_{\varepsilon_{oij}}}} => + 1.96$$

Sustituyendo quedaría

$$\frac{4970{,}17}{32{,}60} = 152{,}45 > \pm 1.96$$

Los productos obtenidos en cada una de las divisiones de los residuos en el nivel dos y uno, son totalmente significativo; pues se obtienen números positivos (28.53 y 152.45) mayores a $\pm$1.96, demostrando la existencia de mucha varianza sin explicar en el rendimiento de las escuelas y en el rendimiento de los estudiantes.

La significatividad de las estimaciones, tanto entre los alumnos dentro de las escuelas como entre escuelas, supone la posibilidad incluir variables explicativas en el modelo. Si estas estimaciones no hubieran sido significativamente distintas de cero, no tendría sentido continuar desarrollando modelos más complejos.

Analizando la información ofrecida, podemos considerar que hay mucha varianza entre las medias de las escuelas y las medias de los alumnos; demostrando que las escuelas difieren entre sí y que los alumnos muestran diferentes tipos de rendimiento dentro de su propia escuela. Con estos datos podemos plantear modelos más complejos y de mayor profundidad para el análisis y estudio del ejemplo.

b) La proporción de varianza explicada por el modelo

Para determinar la proporción de varianza explicada por cada uno de los niveles, se pueden utilizar las ecuaciones recomendadas Bryk y Raudenbush (1992), descritas en los párrafos anteriores. Los cálculos se realizan utilizando los resultados ofrecidos por el modelo nulo, con los índices referentes a la varianza de los residuos: $\sigma^2_{\mu_0}$ = 3527,70 (s.d. 123,61) y $\sigma^2_{e_{0ij}}$ = 4970,17 (s.d. 32,60).

Como contamos con dos niveles, tenemos entonces dos ecuaciones para conocer la proporción de varianza del modelo nulo. Para resolver la ecuación se sustituyen los símbolos por sus valores correspondientes, de esta forma tendremos la varianza explicada en cada nivel.

$\sigma^2/(\sigma^2+\tau_\pi) = \dfrac{4970{,}17}{8497{,}87} = 0.58$ proporción de varianza de nivel uno.

$\tau_\pi \;/(\sigma^2+\tau_\pi) = \dfrac{3527{,}70}{8497{,}87} = 0.41$ proporción de varianza de nivel dos.

Las estimaciones indican la mayor proporción de varianza, o sea un 58%, la cual responde a las diferencias en el al rendimiento de los estudiantes en la prueba de matemáticas y un 41% se debe a las diferencias existente, entre las escuelas. Aunque la mayor cantidad de varianza se encuentra en las diferencias entre los estudiantes, los autores indican tomar como varianza explicada el valor del nivel mayor, en este caso sería el de segundo nivel.

3.3. La introducción de las variables explicativas

Una vez demostrada la varianza sin explicar del modelo nulo, se procede con la introducción de las variables explicativas. De hecho se pueden insertar todas las variables explicativas o independientes señaladas por la teoría, sustentadas en el estudio teórico o por las necesidades del investigador. En este sentido, no existe un límite de variables independientes en los modelos jerárquicos lineales, pues depende de los objetivos de la investigación.

Para el ejemplo del texto, utilizaremos las ya mencionadas: la titularidad del centro, sea público o privado, recursos de la escuela y tipo de currículo. Por ser nuestro escrito una propuesta didáctica, iremos analizando e introduciendo una a una las variables independientes

a) Variables de segundo nivel

Colocada la variable titularidad del centro en el modelo, obtenemos los resultados que se presentan en la Figura 10.

$$\mathrm{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)$$
$$\mathrm{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\mathrm{cons} + -106{,}925(27{,}546)\text{tipo-esc}_j$$
$$\beta_{0ij} = 502{,}911(2{,}068) + u_{0j} + e_{0ij}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3443{,}019(127{,}447) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 5088{,}339(35{,}079) \end{bmatrix}$$
$$-2{*}loglikelihood(IGLS) = 502541{,}100(43771 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})$$

Figura 10. Predictor en dos niveles titularidad del centro.

En este modelo la media general de rendimiento es 502.91 sd 2.068, un poco más alta a la del modelo nulo. El otro efecto, la pendiente (los centros educativos) notamos que los centros privados se encuentran 106.92 puntos abajo de los centros públicos. Indudablemente, el valor es significativo dado que -106.92/27.54 es mayor a $\pm$ 1.96.

Las varianzas residuales se mantienen sin variación, dada la característica de la variable no puede ser incluida en la estructura aleatoria por pertenecer a un nivel superior.

Ahora utilizaremos la variable recursos del centro educativo y la modelaremos en el segundo nivel.

$$\begin{aligned}
&\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)\\
&\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + 12{,}111(1{,}464)\text{recur-sch}_j\\
&\beta_{0ij} = 457{,}711(5{,}060) + u_{0j} + e_{0ij}\\
&\left[u_{0j}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) : \Omega_u = \left[3329{,}072(123{,}870)\right]\\
&\left[e_{0ij}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) : \Omega_e = \left[5086{,}313(35{,}217)\right]\\
&\text{-2*}loglikelihood(IGLS) = 498163{,}600(43396 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})
\end{aligned}$$

Figura 11. Predictor en dos niveles recursos del centro.

Nuevamente encontramos otra variable asociada con el rendimiento en matemáticas. Podemos destacar los centros con mayores recursos educativos, los que cuentan con más y mejores materiales para desarrollar las destrezas y habilidades de sus estudiantes, aumentan el rendimiento en 12.11 puntos más por cada unidad de incremento en la escala que aquellos con menos recursos. Por tanto, podemos predecir a un estudiante en una escuela con un 5 en la escala de recursos del centro, tendría un incremento hipotético en su rendimiento en matemáticas de 60.55 puntos (12.11*5).

Otro elemento a destacar en el análisis es su significatividad, pues $\frac{12{,}11}{1{,}46} = 8{,}29$ un valor mayor a 1.96.

Finalmente, incluimos en el modelo el tipo de currículum de la escuela y analizamos la estimación ofrecida por la Figura 12.

$$\begin{aligned}
&\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)\\
&\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + 5{,}731(1{,}685)\text{curr-esc}_j\\
&\beta_{0ij} = 498{,}996(1{,}544) + u_{0j} + e_{0ij}\\
&\left[u_{0j}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) : \Omega_u = \left[3474{,}150(129{,}249)\right]\\
&\left[e_{0ij}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) : \Omega_e = \left[5085{,}577(35{,}248)\right]\\
&\text{-2*}loglikelihood(IGLS) = 497123{,}900(43300 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})
\end{aligned}$$

Figura 12. Predictor en dos niveles curriculum del centro.

Es evidente el valor significativo y positivo del grado de asociación entre el currículo del centro educativo y el rendimiento en matemáticas, pues 5,73 / 1,68 es mayor a $\pm$ 1,96. El resultado destaca que los centros con un currículo mejor organizado y desarrollado permiten al estudiante mejorar en 5,73 puntos su rendimiento en matemáticas, por cada unidad de medida de la escala. Ante este hecho, los estudiantes con un cinco en la escala de medida de este indicador, incrementan su rendimiento en 28,65 puntos más (5,73*5).

Hasta el momento lo resultados estimados en las variables de segundo nivel, han sido significativos, demostrando con ello un alto grado de asociación con el rendimiento en matemáticas.

b) Variables de primer nivel

Ahora estudiaremos las variables de nivel uno, relacionadas con: la estructura familiar, interés en matemáticas, habilidades motivacionales en matemáticas y tiempo por semana dedicado a realizar las tareas en matemáticas. Las variables de nivel uno varían en el nivel dos, por tanto, serán introducidas en el modelo en los efectos fijos y en los aleatorios de nivel dos, porque su varianza se encuentra a nivel de escuela no de sujeto.

La Figura 13 ofrece la información de la variable estructura familiar.

$$\text{rendmat}_{ij} \sim \text{N}(XB, \Omega)$$
$$\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + \beta_{1j}\text{struc-fam}_{ij}$$
$$\beta_{0ij} = 505{,}590(10{,}888) + u_{0j} + e_{0ij}$$
$$\beta_{1j} = -5{,}851(1{,}826) + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim \text{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 946{,}595(473{,}509) & \\ 0 & 23{,}771(13{,}304) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \text{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 7428{,}718(48{,}216) \end{bmatrix}$$
$$-2{*}loglikelihood(IGLS) = 558160{,}100(47493 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})$$

Figura 13. Predictor de primer nivel estructura familiar

Este modelo muestra a un estudiante con una fuerte estructura familiar, integrada por los padres y los hermanos. La variable significativa (-5.851 / 1.826>$\pm$ 1.96), se encuentra asociada al rendimiento en matemáticas. Los alumnos con menor estructura familiar, sea porque viven con un familiar o con uno de los padres, disminuyen su rendimiento en 5.85 por cada unidad de medida, en este caso la medida cuenta con cuatro valores. Podemos predecir que aquellos quienes en la encuesta marcaron el ítem de respuesta número 4 respecto a la estructura de su familia, tienen 23.4 puntos menos en su rendimiento en matemáticas, que quienes viven en un núcleo familiar muy consolidado. La variable evidencia la importancia del núcleo familiar en los estudiantes.

La parte aleatoria del modelo muestra la existencia de diferencias entre las escuelas de acuerdo con el rendimiento $\sigma^2_{\mu_0}$ 946.595/473.509=1.99, es un valor ligeramente mayor a $\pm$ 1.96.

El efecto aleatorio relacionado con la estructura familiar, o sea $\sigma^2_{\mu_{1j}}$, comprueba la inexistencia de varianza entre los centros educativos respecto a la estructura familiar, el valor no es significativo (23.77/13.30=1.78<$\pm$1.96). Este resultado indica que el grado de asociación entre la estructura familiar y el rendimiento en matemáticas es igual en todas las escuelas. Cuando el valor no es significativo en los efectos aleatorios, el investigador puede eliminar del modelo esta varianza y trabajar únicamente con los efectos fijos.

Por otra parte, una variable que ha sido considerada junto con el rendimiento es el interés del estudiante por las matemáticas. Los investigadores han hipotetizado en el factor una característica importante de los estudiantes con altas puntuaciones en la materia.

Se introduce la variable en el modelo y se observa lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega)\\
&\mathrm{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\mathrm{cons} + \beta_{1j}\mathrm{intmat}_{ij}\\
&\beta_{0ij} = 498{,}985(1{,}417) + u_{0j} + e_{0ij}\\
&\beta_{1j} = -0{,}866(0{,}376) + u_{1j}\\
&\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3458{,}067(122{,}135) & \\ 53{,}183(22{,}725) & 10{,}555(7{,}945) \end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 4978{,}715(33{,}465) \end{bmatrix}\\
&-2{*}loglikelihood(IGLS) = 545902{,}900(47624 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})
\end{aligned}
$$

Figura 14. Predictor de primer nivel interés.

El valor de β_1 es negativo y significativo (-0.866/0.376=2.30>$\pm$ 1.96), demostrando con certeza que los estudiantes menos interesados por la materia ven reducido su rendimiento en 0.866 por cada unidad de medida de la escala. Con ese resultado, podemos predecir que un estudiante que marcó 3 en la escala de medida, verá reducido su rendimiento en matemáticas en 2.59 puntos, respecto a los estudiantes con mayor interés por la materia

La varianza residual (10.55/7.94 = 1.38<$\pm$1.96) no es significativa y expresa que estas diferencias son constantes para todas las escuelas, y que no existe varianza entre ellas. Cuando no se evidencian diferencias significativas en estos efectos aleatorios pueden ser excluidos del modelo.

Por otra parte, la covarianza del modelo aleatorio es significativa (53.18/22.72=2.34>$\pm$ 1.96) dejando claro que la importancia en el interés del estudiante está más asociado al rendimiento con más intensidad en aquellos sujetos con mejores calificaciones en la materia.

Ciertos estudiantes cuentan con estrategias internas de motivación para trabajar en clase de matemáticas y esta habilidad puede jugar un papel muy importante en su rendimiento al momento de realizar algún tipo de prueba. Veamos cómo responde la variable a la estimación.

$$\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)$$
$$\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + \beta_{1j}\text{insmot}_{ij}$$
$$\beta_{0ij} = 499{,}028(1{,}417) + u_{0j} + e_{0ij}$$
$$\beta_{1j} = -0{,}875(0{,}373) + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0, \Omega_u) \;:\; \Omega_u = \begin{bmatrix} 3456{,}658(122{,}058) & \\ 21{,}568(22{,}479) & 17{,}422(7{,}752) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0, \Omega_e) \;:\; \Omega_e = \begin{bmatrix} 4966{,}357(33{,}359) \end{bmatrix}$$
$$-2{*}loglikelihood(IGLS) = 546373{,}900(47670 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})$$

Figura 15. Predictor de primer nivel: habilidades.

El valor de β_1 es negativo y significativo (-0.875/0.373=2.34>± 1.96), la pendiente es inversa indicando que los estudiantes con escasas habilidades motivacionales, tienen un rendimiento reducido en 0.875 por cada unidad de medida en la escala. Aquellos quienes no tengan ninguna estrategia de motivación interna para su trabajo en matemáticas, pueden ver disminuido su rendimiento en 3.5 puntos.

Observando los efectos aleatorios de la variable, encontramos la existencia de diferencias significativas de escuela a escuela, (17.422/7.752=2.24>± 1.96). Estas estrategias motivacionales, relacionadas con el rendimiento en matemática varían de una escuela a otra, indicando que se encuentran asociadas de diferente forma. En algunas escuelas el incremento puede ser mayor y en otras menor. Si se presta atención a la covarianza, su aporte no es significativo (21.568/22.479=0.95<± 1.96) y debe ser eliminada del modelo.

Para finalizar las variables de nivel uno, tomaremos el tiempo por semana dedicado a realizar las tareas de matemáticas. Como es costumbre presentamos su estimación dentro del modelo en la Figura 16.

$$
\begin{aligned}
&\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)\\
&\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + \beta_{1j}\text{rmhmwk}_{ij}\\
&\beta_{0ij} = 500{,}886(1{,}529) + u_{0j} + e_{0ij}\\
&\beta_{1j} = \text{-}2{,}193(1{,}210) + u_{1j}\\
&\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3402{,}502(140{,}597) & \\ \text{-}118{,}345(82{,}986) & 144{,}492(82{,}174) \end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 4990{,}455(36{,}284) \end{bmatrix}\\
&\text{-}2{*}loglikelihood(IGLS) = 472225{,}600(41153 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})
\end{aligned}
$$

Figura 16. Predictor de primer nivel: tiempo a las tareas.

Los resultados aportados por la introducción de la variable en el modelo no son significativos, el valor de β_1 -2,193/1,210=1,80<$\pm$ 1,96, por tanto, cualquier inferencia carece de sentido, es necesario eliminar totalmente la variable del modelo.

c) Estimación total del modelo en dos niveles.

Llegados a este punto se ha podido conocer el funcionamiento de los diferentes estimadores de los modelos jerárquicos lineales, ahora, solamente nos queda introducir en el modelo todas las variables con valores significativos analizadas anteriormente, para conocer en su conjunto el grado de asociación con la variable dependiente.

La Figura 17 contiene todas las estimaciones del modelo.

$$
\begin{aligned}
&\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)\\
&\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + \text{-}79{,}053(27{,}151)\text{tipo-esc}_j + \beta_{2j}\text{struc-fam}_{ij} + 11{,}639(1{,}482)\text{recur-sch}_j + 2{,}838(1{,}673)\text{curr-esc}_j +\\
&\qquad \beta_{5j}\text{intmat}_{ij} + \beta_{6j}\text{insmot}_{ij}\\
&\beta_{0ij} = 466{,}192(5{,}526) + u_{0j} + e_{0ij}\\
&\beta_{2j} = \text{-}1{,}503(0{,}680) + u_{2j}\\
&\beta_{5j} = \text{-}0{,}381(0{,}495) + u_{5j}\\
&\beta_{6j} = \text{-}0{,}617(0{,}502) + u_{6j}\\
&\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{2j} \\ u_{5j} \\ u_{6j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3179{,}488(142{,}470) & & & \\ 3{,}039(44{,}540) & 14{,}714(22{,}261) & & \\ 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & \\ 17{,}259(25{,}894) & 16{,}406(10{,}617) & 0{,}000(0{,}000) & 24{,}021(8{,}938) \end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 5073{,}984(36{,}970) \end{bmatrix}\\
&\text{-}2{*}loglikelihood(IGLS) = 478400{,}600(41667 \text{ of } 48347 \text{ cases in use})
\end{aligned}
$$

Figura 17. Estimación del modelo jerárquico lineal.

Con todas las variables del estudio, el modelo cuenta con mayor poder explicativo para conocer el grado de asociación entre éstas y el rendimiento en matemáticas de los estudiantes. Recordemos que se ha recopilado información sobre las características de los estudiantes y de la escuela.

Al ser un modelo más complejo, con el control de las características de las escuelas y de los estudiantes, muchas de las variables que en su análisis individual eran significativas, ahora dejan de serlo. Estudiemos los efectos fijos por nivel:

Segundo nivel, la escuela.

Currículo de la escuela no es significativa, porque 2.83/1.67=1.69<$\pm$ 1.96, por ello debe excluirse del modelo.

Primer nivel, los estudiantes.

β_5 Interés en matemáticas -0.381/0.495=1.29<$\pm$ 1.96 no es significativa

β_6 Habilidades motivacionales -0.617/0.502=1.22<$\pm$ 1.96 no es significativa

Las variables anteriores no son significativas, no aportan ningún tipo de información sobre el fenómeno de estudio, por esa razón deben ser excluidas del modelo y estimarse nuevamente con las otras variables significativas, para poder analizar con propiedad el grado de asociación entre estas y la variable dependiente rendimiento.

La nueva estimación puede observarse en la Figura 18.

$$\text{rendmat}_{ij} \sim \mathrm{N}(XB, \Omega)$$

$$\text{rendmat}_{ij} = \beta_{0ij}\text{cons} + -83{,}536(27{,}174)\text{tipo-esc}_j + \beta_{2j}\text{struc-fam}_{ij} + 11{,}934(1{,}455)\text{recur-sch}_j$$

$$\beta_{0ij} = 464{,}681(5{,}378) + u_{0j} + e_{0ij}$$

$$\beta_{2j} = -1{,}381(0{,}677) + u_{2j}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) \ : \ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3204{,}301(122{,}674) & \\ 0 & 19{,}773(19{,}738) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) \ : \ \Omega_e = \begin{bmatrix} 5091{,}664(36{,}059) \end{bmatrix}$$

*-2*loglikelihood(IGLS)* = 487026,700(42420 of 48347 cases in use)

Figura 18. Nueva estimación del modelo en dos niveles.

Lo primero a observar son los efectos fijos del modelo. La media general en rendimiento es $\beta_0 = 464.68 s.d. 5.3$, un valor que continúa siendo significativo.

Ahora bien, de todas las variables analizadas por el modelo, la más asociada con el rendimiento en matemática es la titularidad del centro; cuando un estudiante asiste a un centro privado su rendimiento, con respecto a sus compañeros matriculados en centros públicos se reduce en 83.536 puntos (-83.536/27.147=3.07>± 1.96). Este hecho marca grandes diferencias entre el rendimiento de los centros educativos públicos y privados en la muestra, pues los estudiantes de centros privados muestran un menor rendimiento en matemáticas.

También asociado en sentido negativo, se encuentra la estructura familiar del alumno. Los estudiantes, que viven con un padre o un pariente, ven reducido su rendimiento un 1.381 puntos, por cada unidad de medida en la escala de esa variable (-1.381/0.677=2.03>± 1.96). Por ejemplo, un estudiante que marque el ítem tres, (vive con alguien cercano) ve reducido su rendimiento en matemáticas en 4.14 puntos. En esta muestra, el estudiante con un núcleo compuesto por sus padres y hermanos se encuentra muy asociada positivamente a su rendimiento en matemáticas. La estabilidad física y emocional brindada por la estructura familiar es un factor fuertemente asociado al rendimiento en matemáticas de los estudiantes.

Los recursos con que cuenta el centro para enfrentar el proceso educativo, también está asociado al rendimiento de los estudiantes. Un centro con buenos y suficientes recursos incrementa en 11.934 el rendimiento en matemática, por cada unidad de medida (11.934/1.455=8.20>± 1.96), e indica que los buenos materiales, su cantidad y uso oportuno tienen relación con el grado de logro de los alumnos.

Hasta el momento solamente hemos analizado la información ofrecida por los efectos fijos y su grado de asociación con la variable dependiente. Ahora estudiaremos el único efecto aleatorio, dado que los demás fueron excluidos del modelo por no ser significativos. Sin embargo, no podemos ofrecer ningún tipo de inferencia debido a que las diferencias encontradas en el modelo no son significativas (19.773/19.738=1.00<± 1.96), o sea, en el modelo no existen varianza entre las escuelas respecto a los recursos, siendo en todas ellas igual.

Como siguiente paso, queda por determinar la calidad y ajuste de este modelo respecto del modelo nulo, para ello es necesario estudiar los valores de la razón de verosimilitud.

3.4. Comparación entre los modelos o razón de verosimilitud

Para conocer cuál de los modelos es mejor, se debe estudiar la razón de verosimilitud, ofrecida por el paquete estadístico en la parte inferior de la pantalla con el nombre: -2**loglikelihood*. Su análisis permite conocer si el modelo final propuesto en nuestro estudio, en dos niveles, es mejor o peor que el modelo nulo o que otros modelos desarrollados en el presente trabajo. Este referente facilita información para la toma de decisiones acerca del uso o desecho de los datos conseguidos con la estimación de los parámetros.

Para estudiar la diferencia entre ambos modelos (nulo y final), es necesario tomar el valor obtenido en el modelo nulo (-2**loglikelihood* es de 554 045.300) y la razón de verosimilitud del modelo final en dos niveles (-2**loglikelihood* =487 026.700).

Luego se resta el segundo al primero:

$$-\frac{554045.300}{487026.700} = 67018.6$$

El producto de la resta de ambos estimadores es 67 018.6. Este resultado demuestra que el nuevo modelo ha reducido el valor estadístico de ajuste, en una diferencia de 67 018.6.

El producto anterior puede ser considerado un valor de ji cuadrado con siete grados de libertad, o sea, los parámetros incluidos en el modelo bajo la hipótesis nula de que los parámetros extras tienen un valor de población de cero. Si tomamos este número y realizamos la estimación de ji cuadrado correspondiente, se obtiene un resultado de 0.000, un valor totalmente significativo. Ello permite concluir que el modelo propuesto en dos niveles se ajusta mejor a los datos que el modelo nulo, por tanto, es superior su consistencia, ofreciendo información confiable y significativa para el análisis de los datos.

Analizada la razón de verosimilitud, es importante observar los gráficos de los residuos del modelo de estudio, para determinar la existencia de desviaciones atípicas o no sujetas a la normalidad de los residuos.

3.5. Representación gráfica de los residuos

En el análisis de los residuos se pretende examinar el comportamiento de cada uno de los dos niveles, esperando un ajuste deseable dentro de los rangos normales. Al igual que la estimación de todos los componentes anteriores, utilizaremos el programa MLwiNN, el cual ofrece un intervalo de confianza de un 95% en su estimación.

a) Residuos de primer nivel, los estudiantes

La Figura 19 se refiere a los residuos de primer nivel:

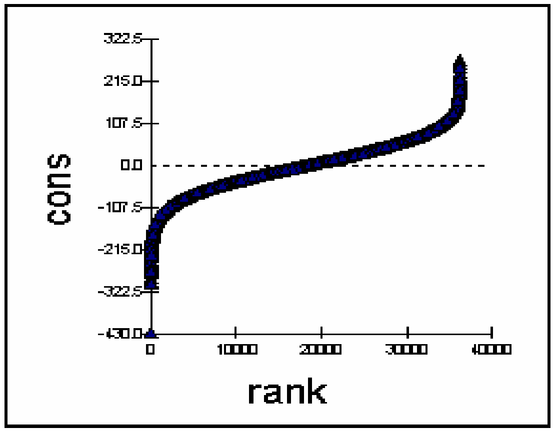


Figura 19. Residuos de primer nivel.

Se observa un gráfico con una distribución normal, solamente uno de los sujetos de la muestra se aparta de los rangos normales y su estimación esta alejada del comportamiento de los demás residuos. En este caso es necesario ver el histograma para determinar si existen violaciones a la normalidad de los residuos.

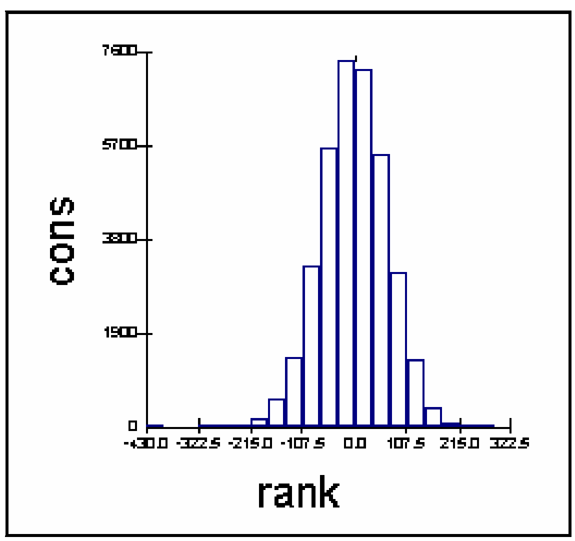


Figura 20. Histograma de residuos de primer nivel.

Subrayando la estimación del histograma, podemos considerar que expresa la normalidad de los residuos, pues ninguno se encuentra desviado y se congregan en el centro alrededor del valor cero, demostrando así su normalidad.

Ahora necesitamos conocer el comportamiento de los residuos de nivel dos, la escuela.

b) Residuos de nivel dos, las escuelas

Los residuos a nivel de las escuelas pueden observarse en la Figura 21.

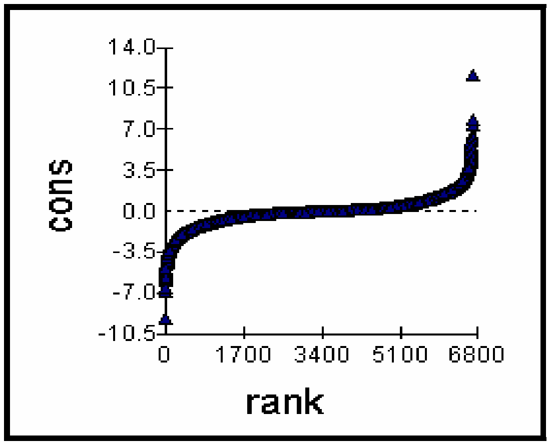


Figura 21. Residuos de segundo nivel.

En este nivel vemos dos escuelas, en los extremos inferior y superior, que se encuentran apartadas de la normalidad de los residuos, pero en general las demás se ajustan perfectamente a los cánones establecidos para los residuos. Veremos lo que sucede con el histograma.

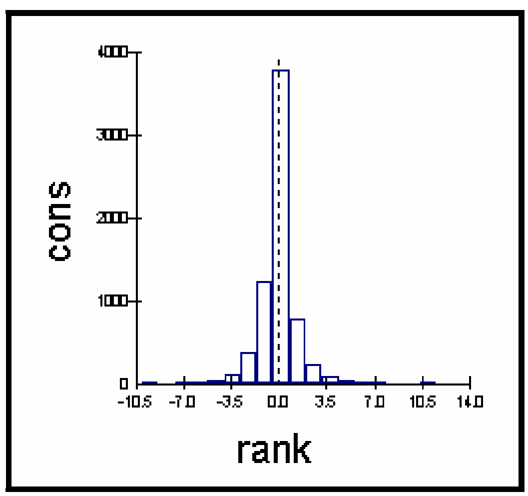


Figura 22. Histograma de residuos de segundo nivel.

La información aportada por el histograma de los residuos de las escuelas revela que las predicciones para el nivel dos se mantienen dentro de los rangos esperados y considerados como normales, todos alrededor del cero.

Los residuos del modelo jerárquico lineal en dos niveles, para el estudio del rendimiento en matemáticas demuestran un perfecto ajuste y normalidad e indican con ello el buen comportamiento de modelo, cuyas estimaciones aportadas pueden ser consideras válidas para nuestro propósito de estudio. Porque de no ser así, la condición implicará que la estimación obtenida no será la mejor y el error de predicción estimado tampoco será válido, debido a que no es siempre el mismo. Un problema de esta naturaleza afectará la validez de los diferentes coeficientes del modelo.

Finalmente, con los conocimientos adquiridos en el desarrollo y análisis de un modelo jerárquico lineal en dos niveles, es hora de ver uno en tres niveles.

CAPÍTULO IV
EJEMPLO EN TRES NIVELES

Por Covadonga Ruiz de Miguel

4. EJEMPLO EN TRES NIVELES

Una vez visto el ejemplo de un modelo en dos niveles, presentamos en este capítulo un nuevo ejemplo, esta vez de tres niveles, realizado a partir también de datos reales.

Estos proceden del Proyecto PISA (*Programme for Indicators of Student Achievement*) de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), concretamente a los correspondientes al estudio de 2003. El Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos, denominado Proyecto PISA es el resultado de la aplicación de la estrategia de actuación desarrollada por la Red A, encargada del área de los resultados educativos del Proyecto de Indicadores Internacionales de los Sistemas Educativos (Proyecto INES).

El proyecto INES del Centro para la Investigación e Innovación Educativas (CERI) dependiente de OCDE tiene como objetivo la producción de indicadores educativos sobre los sistemas de sus países miembros, que incluyen indicadores comparativos internacionales del rendimiento escolar de los alumnos.

En el estudio han formado parte un total de 40 países (Alemania, Australia, Austria, Bélgica, Brasil, Canadá, Dinamarca, Eslovaquia, España, Estados Unidos, Federación Rusa, Finlandia, Francia, Grecia, Holanda, Hong Kong (China), Hungría, Indonesia, Irlanda, Islandia, Italia, Japón, Korea, Latvia, Liechtenstein, Luxemburgo, Macao (China), México, Noruega, Nueva Zelanda, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, Suecia, Suiza, Tailandia, Túnez, Turquía, Uruguay y Yugoslavia), 10274 escuelas, y 276165 estudiantes. Lamentablemente Costa Rica, a la zaga, no ha sido participe de la investigación internacional[24], la cual permitiría comparar y conocer el rendimiento de nuestro país en relación con otros.

Para la elaboración de este modelo en tres niveles se ha trabajado con los datos de cinco países europeos (España, Francia, Italia, Alemania y Reino Unido), con un total de 1 558 escuelas y 40 925 estudiantes.

La variable dependiente con la que se ha trabajado es *el rendimiento en lectura*, que se ha estimado a partir de la media aritmética entre los valores posibles en esta materia (cinco valores extraídos al azar de la distribución de la puntuación de cada individuo).

4.1. Estudio del modelo nulo en tres niveles

Como en el caso anterior de dos niveles, el primer paso debe ser conocer la proporción de varianza sin explicar del modelo nulo. Con este objetivo introducimos los datos en el programa MLwiN, para proceder con la estimación de los dos parámetros: el intercepto y las varianzas de los residuos en los tres niveles. Tras esta estimación determinaremos si el modelo ofrece la suficiente cantidad de varianza como para soportar la inclusión de variables explicativas o

---

24 Nota introducida por el autor del cuaderno metodológico.

desecharlo y construir uno nuevo. Este modelo en tres niveles se compone de: estudiantes (primer nivel), escuela, (segundo nivel) y países (tercer nivel).

El modelo nulo quedaría formulado de la siguiente manera.

$$
\begin{aligned}
y_{ijk} &\sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega) \\
y_{ijk} &= \beta_{0ijk} x_0 \\
\beta_{0ijk} &= \beta_0 + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Definida la variable dependiente y la constante, se estima el modelo. Los resultados se pueden ver en la Figura 23.

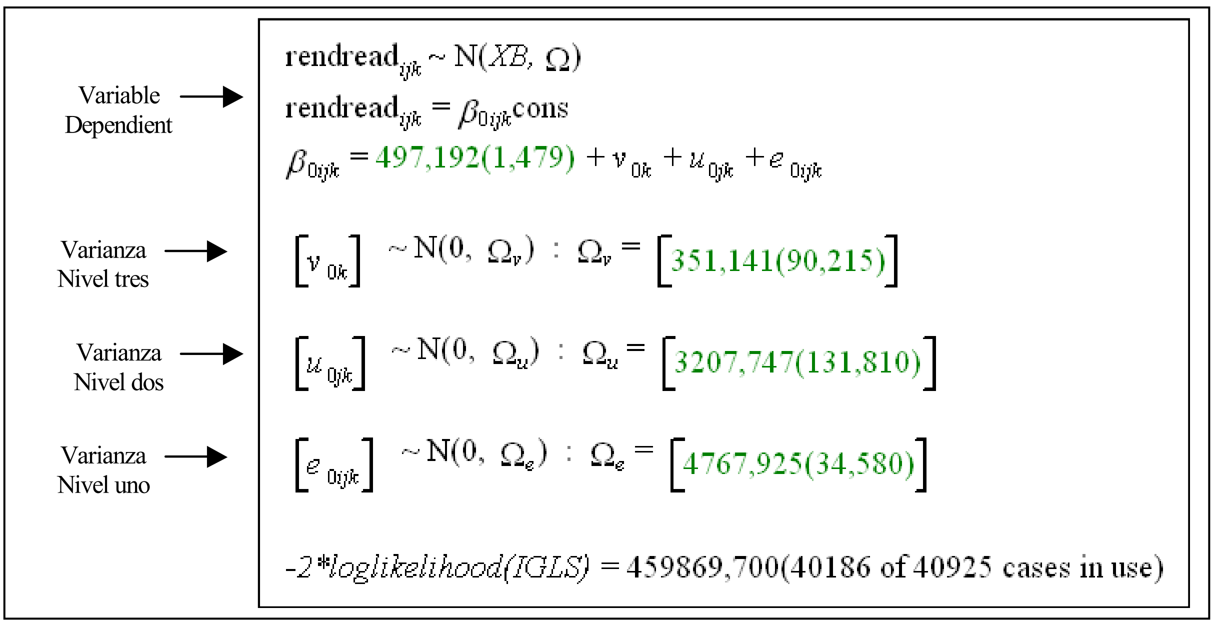


Figura 23. Modelo nulo de tercer nivel.

Podemos observar que los sujetos difieren entre sí en rendimiento en los tres niveles. La varianza entre países (nivel 3) es de 351.141, valor muy superior a su error típico (90.215). Al dividir el primer valor entre el segundo, el resultado es de 3.8, mayor al mínimo establecido por diferentes autores quienes señalan como mínimo el ±1.96.

Para el nivel 2 (escuelas), la varianza es 3207.747, que dividida entre su error típico (131.810), nos da un valor de 24.3, valor altamente significativo.

Por último, para el nivel 1 (estudiantes), el valor resultante de dividir la estimación de la varianza (4767.925) entre su error típico (34.580) es de 137.88, de nuevo un valor significativo.

La estimación de β_0 es igualmente significativa, la media general del rendimiento en lectura es 497.192 y su error típico de 1.479. Dividiendo ambos estimadores da un valor de 336.12, muy superior al mínimo señalado de ±1.96.

Así pues, analizando la información ofrecida en el gráfico anterior, podemos concluir que existe suficiente varianza sin explicar dentro de los países (tercer nivel), esto nos indica que hay diferencias en el rendimiento de los alumnos en lectura entre los países. La existencia de varianza en el segundo nivel (escuelas) revela que los sujetos se diferencian también dentro de las escuelas: y la existencia de varianza en el primer nivel (alumnos) manifiesta diferencias entre los estudiantes.

Con los resultados podemos concluir que el modelo nulo cuenta con suficiente varianza sin explicar en sus tres niveles. Ello permite continuar utilizando el modelo para un estudio mas profundo que incluya las variables explicativas.

4.2. Inclusión de variables explicativas o independientes

Dado que pretendemos una explicación didáctica de un modelo de tres niveles, vamos a introducir únicamente 3 variables en el nivel uno, 2 en el nivel dos y 3 en el tercer nivel, con el fin de no llegar a una ecuación de predicción compleja que abrume al lector. Sin embargo, en una modelización real, podríamos introducir en cada nivel tantas variables explicativas como indique la teoría.

a) Variables de nivel 1 (estudiantes)

Como variables de nivel uno (estudiante) se introducirá el *sexo* del alumno, la *cantidad de libros que hay en su casa,* las *aspiraciones educativas de los alumnos* y su *edad.* Nótese que estas variables se hacen variar en el nivel dos, por lo que los parámetros estimados llevarán el subíndice *j* correspondiente a las escuelas.

De este modo y dada la codificación de las variables realizada en el informe PISA, la constante o intercepto indicaría el valor de la media de rendimiento en lectura de las alumnas, en cuya casa no existen libros de lectura, cuya aspiración educativa no supera la educación primaria y con una edad igual a la media de toda la muestra (15.7). La estimación se presenta en la Figura 24.

$$\text{rendread}_{ijk} \sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega)$$
$$\text{rendread}_{ijk} = \beta_{0ijk}\text{cons} + \beta_{1j}\text{sex}_{ijk} + \beta_{2j}\text{books}_{ijk} + \beta_{3j}\text{aspeduc}_{ijk} + \beta_{4j}\text{age}_{ijk}$$
$$\beta_{0ijk} = 435{,}490(11{,}593) + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}$$
$$\beta_{1j} = \text{-}22{,}500(0{,}750) + u_{1jk}$$
$$\beta_{2j} = 8{,}728(0{,}290) + u_{2jk}$$
$$\beta_{3j} = 22{,}065(0{,}357) + u_{3jk}$$
$$\beta_{4j} = \text{-}0{,}006(0{,}006) + u_{4jk}$$
$$\begin{bmatrix} v_{0k} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v) \ : \ \Omega_v = \begin{bmatrix} 182{,}509(119{,}748) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \\ u_{4jk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) \ : \ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3968{,}430(292{,}229) & & & & \\ \text{-}40{,}149(72{,}404) & 149{,}838(29{,}460) & & & \\ \text{-}142{,}718(27{,}838) & 10{,}832(8{,}226) & 26{,}859(4{,}497) & & \\ \text{-}370{,}044(36{,}633) & \text{-}6{,}344(10{,}117) & 0{,}088(3{,}970) & 67{,}757(6{,}655) & \\ 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e_{0ijk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) \ : \ \Omega_e = \begin{bmatrix} 3532{,}250(27{,}022) \end{bmatrix}$$

*-2*loglikelihood(IGLS)* = 439674,000(39464 of 40925 cases in use)

Figura 24. Variables independientes de primer nivel.

Podemos observar en esta figura, que el parámetro asociado a la variable edad no ha resultado significativo, ya que el valor de β_4 (-0.006) dividido entre su error típico (0.006) nos da un resultado de 1, inferior al mínimo (±1.96). Por esta razón, eliminamos esta variable y volveremos a estimar el modelo. Los resultados de esta nueva estimación se presentan en la Figura 25.

Efectos fijos

$$\text{rendread}_{ijk} \sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega)$$
$$\text{rendread}_{ijk} = \beta_{0ijk}\text{cons} + \beta_{1j}\text{sex}_{ijk} + \beta_{2j}\text{books}_{ijk} + \beta_{3j}\text{aspeduc}_{ijk}$$
$$\beta_{0ijk} = 423{,}445(2{,}294) + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}$$
$$\beta_{1j} = \text{-}22{,}363(0{,}746) + u_{1jk}$$
$$\beta_{2j} = 8{,}924(0{,}290) + u_{2jk}$$
$$\beta_{3j} = 22{,}124(0{,}345) + u_{3jk}$$

Efectos aleatorios

$$\begin{bmatrix} v_{0k} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v) \ : \ \Omega_v = \begin{bmatrix} 421{,}719(54{,}925) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) \ : \ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3399{,}104(287{,}707) & & & \\ 1{,}551(75{,}338) & 150{,}988(31{,}993) & & \\ \text{-}134{,}944(28{,}971) & 11{,}276(8{,}941) & 29{,}199(4{,}931) & \\ \text{-}359{,}998(36{,}889) & \text{-}7{,}692(10{,}714) & 0{,}211(4{,}242) & 66{,}567(6{,}905) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e_{0ijk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) \ : \ \Omega_e = \begin{bmatrix} 3536{,}035(27{,}828) \end{bmatrix}$$

Figura 25. Nueva estimación del modelo en tres niveles.

Como vemos, los parámetros fijos son totalmente significativos, pues la división del beta (interceptos y pendientes) entre su desviación estándar es mayor a ±1.96 en todos los casos, por podemos emplearlos para analizar el modelo en tres niveles ($\beta_0 = 423.445$/2.294 = 184.58; $\beta_1 = -22.363$/0.746 = 29.97; $\beta_2 = 8.924$/0.290 = 30.77; $\beta_3 = 22.124$/0.345 = 64.12).

La primera estimación, el intercepto o media general del rendimiento en lectura, tiene una $\beta_0 = 423.445$ puntos, un valor un poco bajo si lo comparamos con la media en matemáticas (498). Ahora bien, si quisiéramos realizar una predicción con los estudiantes varones veríamos que la media disminuye 22.363 puntos (valor de la estimación del parámetro $\beta_1 = -22.363$), en relación con el rendimiento mostrado por las mujeres, quienes superan en ese valor a sus compañeros de estudio. Por otro lado, la media aumentaría en 8.924 puntos por cada unidad en la escala de posesión de libros que se tenga en casa (valor de la estimación del parámetro $\beta_2 = 8.924$). Los estudiantes con acceso a información de textos, enciclopedias y otros tienden a incrementar su rendimiento en lectura. Otra variable de primer nivel que también esta asociada al rendimiento en lectura son las aspiraciones educativas del estudiante, debido a que por cada punto ascendente en la escala de aspiraciones educativas del alumno, su rendimiento en lectura aumenta en 22.124 puntos más (valor de la estimación del parámetro $\beta_3 = 22.124$). De esa forma si un estudiante marcó en el ítem tres de aspiraciones, su nota media se verá incrementada en 66.372 puntos.

Por ejemplo, si pensáramos en una predicción para una estudiante mujer, marcando en el ítem tres de posesión de libros y en el ítem dos de aspiraciones, tendríamos una ecuación como la siguiente:

423.445+8.924*3+66.372*2= 423.445+26.772+132.744= 573.961

En otras palabras, la predicción para su rendimiento medio estaría alrededor de los 573.961 puntos, con todas las variables asociadas.

Nos detenemos ahora en la explicación de los efectos aleatorios

$$\left[v_{0k}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v) \ :\ \Omega_v = \left[421{,}719(54{,}925)\right]$$

$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) \ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3399{,}104(287{,}707) & & & \\ 1{,}551(75{,}338) & 150{,}988(31{,}993) & & \\ -134{,}944(28{,}971) & 11{,}276(8{,}941) & 29{,}199(4{,}931) & \\ -359{,}998(36{,}889) & -7{,}692(10{,}714) & 0{,}211(4{,}242) & 66{,}567(6{,}905) \end{bmatrix}$$

$$\left[e_{0ijk}\right] \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) \ :\ \Omega_e = \left[3536{,}035(27{,}828)\right]$$

Figura 26. Efectos aleatorios.

El valor $\sigma^2_{v_0}$ hace referencia a la varianza entre países, la estimación es de 421.719, valor altamente significativo, porque al dividirlo entre su error típico (54.925) ofrece un valor superior a ±1,96 (421.719/54.925=7.678).

Los valores $\sigma^2_{\mu_0}$, $\sigma^2_{\mu_1}$, $\sigma^2_{\mu_2}$ y $\sigma^2_{\mu_3}$ muestran la varianza / covarianza de nivel 2, (la escuela).

El primero de ellos $\sigma^2_{\mu_0}$, destaca la varianza residual de la variable *rendimiento en lectura* entre escuelas. El valor del parámetro es significativo (3399.104/287.707=11.81 > ±1.96), demostrando la existencia de diferencias en el nivel de escuelas; estas difieren de una a otra en cuanto a su rendimiento en lectura.

El valor $\sigma^2_{\mu_1}$ representa la varianza residual del variable *sexo.* En este caso, la varianza vuelve a ser significativa, el parámetro estimado tiene un valor de 150.988, y dividido entre su error típico (31.993) resulta 4.719, indican que existen diferencias en el nivel de escuelas en función de esta variable, o sea, el rendimiento en lectura entre los hombres y las mujeres es diferente. También es desigual dentro de estudiantes del mismo sexo. La covarianza, por su parte, con un valor de 1.551 (75.338), indicaría las diferencias a nivel de escuelas provocadas por la acción conjunta de las variables *sexo* y *rendimiento en lectura*, pero en este caso no ha resultado significativa.

El símbolo $\sigma^2_{\mu_2}$ constituye la varianza residual de la variable *libros en el hogar* y su valor es igualmente significativo, (29.199/4.931=5.921>±1.96) e indican que existen diferencias en el nivel de escuelas asociadas a la *cantidad de libros en el hogar*. Algunas escuelas difieren entre sí en su rendimiento en lectura de acuerdo con la cantidad de libros en el hogar. La covarianza entre esta variable y el *rendimiento en lectura* (-134.944/28.971=4.65>±1.96) resulta significativa que indican diferencias en el nivel de escuelas provocadas por la acción conjunta de estas variables. El signo negativo puede interpretarse como que estas diferencias se dan de una forma más acusada en sujetos con rendimiento más bajo. Cuando el rendimiento es superior, la cantidad de libros en el hogar no afecta tanto a los sujetos. En la misma estimación, la covarianza entre las variables cantidad de libros y sexo (11.27/8.941=1.26<±1.96) ha resultado no significativa, por esa razón su aporte al modelo no debe ser tomado en cuenta.

El último de estos valores, $\sigma^2_{\mu_3}$ es la varianza residual de la variable *aspiraciones educativas.* La varianza, como en casos anteriores, es significativa (66.567/6.905=9.640>±1.96) y pone de manifiesto diferencias en el nivel de escuelas, las aspiraciones son diferentes entre las escuelas. De las covarianzas, sólo la relacionada con las variables *aspiraciones educativas y rendimiento* ha resultado significativa (-359.998/36.889=9.758>±1.96), de nuevo, el valor negativo del parámetro nos indica que el efecto se observa de una forma más acusada en aquellos sujetos con un rendimiento más bajo, pues los estudiantes con un alto rendimiento están menos asociados con la variable. La covarianza entre las variables *aspiraciones educativas y sexo* (-7.692/10.714) y *aspiraciones educativas y cantidad de libros* (0.211/4.242) no han resultado significativas, interpretándose que no hay diferencias a nivel de escuelas por la acción conjunta de estas variables.

Finalmente, el valor $\sigma^2_{\varepsilon 0}$ es la varianza residual sin explicar del nivel 1 (estudiantes). Como puede verse, con la introducción de varios predictores su valor ha disminuido notablemente, pasando de 4767.925 en el modelo nulo a 3536.036 en el modelo de nivel 1. A pesar de su reducción continúa siendo un valor altamente significativo, que evidencia la existencia de diferencias en el rendimiento de los estudiantes.

b) Variables de nivel 2 (escuelas).

Las variables independientes elegidas en este nivel han sido las siguientes: tamaño de la escuela y déficit de materiales de lectura existente en el centro.

En el cuadro siguiente se ofrece la estimación de los parámetros con la inclusión de las variables de nivel 2, las cuales varían en el nivel 3.

$$\text{rendread}_{ijk} \sim \text{N}(XB,\ \Omega)$$

$$\text{rendread}_{ijk} = \beta_{0ijk}\text{cons} + \beta_{1j}\text{sex}_{ijk} + \beta_{2j}\text{books}_{ijk} + \beta_{3j}\text{aspeduc}_{ijk} + \beta_{4k}\text{defmatlib2}_{jk} + \beta_{5k}\text{schsize}_{jk}$$

$$\beta_{0ijk} = 443{,}591(8{,}203) + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}$$

$$\beta_{1j} = -22{,}205(0{,}825) + u_{1jk}$$

$$\beta_{2j} = 8{,}523(0{,}317) + u_{2jk}$$

$$\beta_{3j} = 22{,}492(0{,}393) + u_{3jk}$$

$$\beta_{4k} = -8{,}398(1{,}831) + v_{4k}$$

$$\beta_{5k} = 0{,}019(0{,}003) + v_{5k}$$

$$\begin{bmatrix} v_{0k} \\ v_{4k} \\ v_{5k} \end{bmatrix} \sim \text{N}(0,\ \Omega_v)\ :\ \Omega_v = \begin{bmatrix} 214{,}936(175{,}585) & & \\ -12{,}698(31{,}477) & 7{,}010(9{,}362) & \\ 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \end{bmatrix} \sim \text{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3818{,}762(314{,}930) & & & \\ -92{,}654(79{,}818) & 148{,}803(32{,}522) & & \\ -133{,}926(30{,}164) & 5{,}329(9{,}062) & 26{,}799(4{,}924) & \\ -372{,}378(40{,}026) & 3{,}589(11{,}225) & -0{,}582(4{,}377) & 69{,}938(7{,}359) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ijk} \end{bmatrix} \sim \text{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 3600{,}031(29{,}867) \end{bmatrix}$$

*-2*loglikelihood(IGLS)* = 373434,400(33478 of 40925 cases in use)

Figura 27. Variables de nivel dos.

La estimación del rendimiento en lectura es de $\beta_0 = 443.591$ puntos como media general entre los estudiantes; se refiere a las alumnas, en cuyo hogar no existan libros de lectura, que sus aspiraciones educativas no superen la educación primaria, en cuya escuela no exista déficit de materiales de lectura, y que tengan el tamaño medio de las escuelas del estudio.

La variable *tamaño de la escuela,* se ha centrado respecto a la media total. Esta variable, en principio, indicaba el tamaño de cada una de las 1558 escuelas que componían nuestro estudio. Con el fin de hacer más fácil la interpretación de la ecuación de predicción se ha centrado la variable respecto a la media total de las variables[25]. Para ello, se ha calculado la media de esta variable, que es 753.91 y se ha creado una nueva variable restando a cada valor la primera media obtenida. La nueva variable tendrá como media el valor 0 y algunos valores serán negativos cuando la escuela tenga un numero de alumnos inferior a la media, y positivo, cuando el numero de alumnos sea mayor.

En el caso de hacerse la estimación para un alumno varón ($\beta_1 = -22.205$), con 22.205 puntos menos respecto de las mujeres, su rendimiento en lectura aumentaría en 8.523 puntos por cada punto en la escala de posesión de *libros de lectura* en casa ($\beta_2 = 8.523$). También aumentaría otros 22.492 puntos, por cada punto en la escala de medida de las *aspiraciones educativas* ($\beta_3 = 22.492$). Pero este incremento se vería disminuido en 8.398 puntos, a medida que aumentase el *déficit existente de materiales de lectura en la escuela* ($\beta_4 = -8.398$). Otra variable de segundo nivel relacionada también con su rendimiento sería el *tamaño de la escuela* la cual incrementa en 0.019 puntos su rendimiento ($\beta_5 = 0.019$).

Los efectos aleatorios del modelo se interpretarían exactamente igual que en el nivel uno. Ahora tenemos una matriz de varianzas/ covarianzas para el nivel de escuelas, variando en el nivel de países. Trate el lector de interpretar su significado para el nivel de escuelas, siguiendo el procedimiento utilizado en el modelo con variables explicativas de nivel 1.

$$\begin{bmatrix} v_{0k} \\ v_{4k} \\ v_{5k} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v)\ :\ \Omega_v = \begin{bmatrix} 214{,}936(175{,}585) & & \\ -12{,}698(31{,}477) & 7{,}010(9{,}362) & \\ 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) \end{bmatrix}$$

Figura 28. Matriz de varianza /covarianza para el nivel 3.

[25] Ver el apartado de centrado en Capítulo Nº 5 referente a consejos prácticos.

Puede verse en el cuadro las varianzas/covarianzas de nivel dos variando en el nivel de países. Los efectos aleatorios σ^2_{v0}, σ^2_{v4} y σ^2_{v5} no son significativos, ninguno es mayor a $\pm$1.96 e indica que no hay varianza en el nivel de países, el rendimiento es igual en todos.

Interpretando el valor de σ^2_{v0} tenemos 214.936 (175.585) que hace referencia a la varianza residual de la variable dependiente (*rendimiento en lectura*) en el nivel de países. El que no sea significativo se interpreta como que no hay diferencias en esta variable a nivel de países.

El valor σ^2_{v4} 7.010 (9.362) se refiere a la varianza residual en el nivel de países de la variable *déficit de materiales de lectura en la escuela.* Al no ser significativo, interpretamos que no hay diferencias en esta variable a nivel de países.

El valor de σ^2_{v5} 0.0000 (0.0000) indica la ausencia de varianza residual en el nivel de países, relacionada con el tamaño de la escuela.

En resumen, las covarianzas de las variables (déficit de materiales de lectura en la escuela, rendimiento en lectura, tamaño de la escuela, rendimiento en lectura, tamaño de la escuela y déficit de materiales de lectura en la escuela) muestran la inexistencia de diferencias a nivel dos en función de la acción conjunta de estas variables.

Cabe señalar en este punto que, al introducir las variables de nivel 2, es preciso crear las *variables de interacción* entre el nivel uno y el nivel dos e introducirlas en el modelo como efectos fijos. Esto es tan sencillo como crear nuevas variables consistentes en el producto de cada variable de nivel uno, multiplicado por la variable de nivel dos. Para este ejemplo las variables de interacción serían variables: sex*defmatlib2; sex*schoolsize; books*defmatlib2; books*schoolsize; aspeduc*defmatlib2 y aspeduc*schoolsize. En el cuadro 30 no aparecen estas variables al resultar su estimación no significativa. Cuando esto ocurre, se eliminan del modelo, por eso no fueron introducidas en el análisis.

4.3. Modelo definitivo con variables a nivel de países

Por último y para estimar los parámetros del modelo definitivo de tres niveles, vamos a introducir las variables explicativas de nivel 3, es decir, en el nivel de países, pero serán ubicadas únicamente en los parámetros fijos del modelo, debido a que la varianza de estas variables estaría en un nivel superior, o sea, en el nivel cuatro, pero este modelo es de tres niveles, por tanto, se deben incluir las variables en los parámetros fijos. Los resultados aparecen en la Figura 29.

Las variables seleccionadas para este nivel son: existencia de relaciones pobres entre profesores y estudiantes en el nivel de países, la existencia de problemas de alcohol y drogas entre los alumnos en el nivel de países y la autonomía de recursos de los centros a nivel de países.

Primeramente, observamos la estimación del rendimiento en lectura en este caso es de $\beta_0 = 452.951$ puntos para las alumnas, en cuyo hogar no existan libros de lectura, que sus aspiraciones educativas no superen la educación primaria, en cuya escuela no exista déficit de materiales de lectura, que tengan el tamaño medio de las escuelas del estudio, en cuyos países no existe autonomía de recursos, no existen relaciones pobres entre profesores y estudiantes y no que haya problemas de alcohol o drogas.

$$\mathrm{rendread}_{ijk} \sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rendread}_{ijk} = {} & \beta_{0ijk}\mathrm{cons} + \beta_{1j}\mathrm{sex}_{ijk} + \beta_{2j}\mathrm{books}_{ijk} + \beta_{3j}\mathrm{aspeduc}_{ijk} + \beta_{4k}\mathrm{defmatlib2}_{jk} + \\ & \beta_{5k}\mathrm{schsize}_{jk} + \text{-}2{,}705(1{,}864)\mathrm{poorelation}_{jk} + \text{-}7{,}029(1{,}941)\mathrm{alcoh\&drug}_{jk} + \\ & 2{,}167(0{,}841)\mathrm{autonrec}_{jk}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{0ijk} &= 452{,}951(10{,}635) + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}\\ \beta_{1j} &= \text{-}22{,}050(0{,}831) + u_{1jk}\\ \beta_{2j} &= 8{,}522(0{,}319) + u_{2jk}\\ \beta_{3j} &= 22{,}460(0{,}399) + u_{3jk}\\ \beta_{4k} &= \text{-}8{,}035(2{,}144) + v_{4k}\\ \beta_{5k} &= 0{,}019(0{,}003) + v_{5k}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_{0k} \\ v_{4k} \\ v_{5k} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v)\ :\ \Omega_v = \begin{bmatrix} 313{,}987(245{,}510) & & \\ \text{-}38{,}930(47{,}513) & 11{,}763(12{,}805) & \\ 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) & 0{,}000(0{,}000) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u)\ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3812{,}303(317{,}327) & & & \\ \text{-}97{,}196(80{,}377) & 147{,}528(32{,}685) & & \\ \text{-}129{,}235(30{,}334) & 4{,}478(9{,}117) & 26{,}842(4{,}958) & \\ \text{-}382{,}437(40{,}735) & 4{,}763(11{,}390) & \text{-}0{,}944(4{,}444) & 72{,}667(7{,}535) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ijk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e)\ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 3589{,}417(30{,}025) \end{bmatrix}$$

*-2*loglikelihood(IGLS)* = 367259,500(32933 of 40925 cases in use)

Figura 29. Estimación del modelo definitivo con variables de tercer nivel.

El valor de la media en *rendimiento en lectura* se vería reducido en 22.050 puntos en el caso de hacerse la estimación para un alumno varón ($\beta_1 = -22.050$), pero aumentaría 8.522 puntos por cada unidad en la escala de posesión de libros de lectura en casa ($\beta_2 = 8.522$). También aumentaría la media en otros 22.460 puntos por cada unidad en la escala de aspiraciones educativas del alumno para el que se hace la predicción ($\beta_3 = 22.460$). Pero disminuiría 8.035 puntos a medida que aumentase el déficit existente en la escuela de materiales de lectura ($\beta_4 = -8.035$). No obstante, su rendimiento podría verse incrementado en 0.019 puntos por un aumento del tamaño de la escuela ($\beta_5 = 0.019$) respecto de la media de todas las escuelas.

Ahora bien, con relación a los países (tercer nivel) la media se vería disminuida en 2.705 puntos por cada unidad en la escala de existencia de relaciones pobres entre alumnos y profesores ($\beta_6 = -2.705$). También se vería disminuida en 7.029 puntos ($\beta_7 = -7.029$) por cada unidad en la escala de existencia de problemas de alcohol y drogas en las escuelas de los diferentes países. Podemos ver que las bajas relaciones entre los estudiantes y los problemas de drogas y alcohol en el nivel de países son factores negativos asociados al rendimiento de los estudiantes.

Por otra parte, un factor positivo, a nivel de países, que incrementa la media es la autonomía de recursos cuyo valor aumentaría en 2.167 por cada unidad de medida en la escala.

Como puede verse en la Figura 29 no existe varianza entre países, por lo que se eliminan estos parámetros de la estimación (ver Figura 30).

$$\text{rendread}_{ijk} \sim \mathrm{N}(XB,\ \Omega)$$

$$\text{rendread}_{ijk} = \beta_{0ijk}\text{cons} + \beta_{1j}\text{sex}_{ijk} + \beta_{2j}\text{books}_{ijk} + \beta_{3j}\text{aspeduc}_{ijk} + \beta_{4k}\text{defmatlib2}_{jk} + 0{,}019(0{,}003)\text{schsize}_{jk} + \text{-}2{,}705(1{,}864)\text{poorelation}_{jk} + \text{-}7{,}029(1{,}941)\text{alcoh\&drug}_{jk} + 2{,}167(0{,}841)\text{autonrec}_{jk}$$

$$\beta_{0ijk} = 452{,}951(10{,}635) + v_{0k} + u_{0jk} + e_{0ijk}$$

$$\beta_{1j} = \text{-}22{,}050(0{,}831) + u_{1jk}$$

$$\beta_{2j} = 8{,}522(0{,}319) + u_{2jk}$$

$$\beta_{3j} = 22{,}460(0{,}399) + u_{3jk}$$

$$\beta_{4k} = \text{-}8{,}035(2{,}144) + v_{4k}$$

$$\begin{bmatrix} v_{0k} \\ v_{4k} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_v) \ :\ \Omega_v = \begin{bmatrix} 314{,}007(245{,}574) & \\ \text{-}38{,}935(47{,}547) & 11{,}763(12{,}817) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0jk} \\ u_{1jk} \\ u_{2jk} \\ u_{3jk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_u) \ :\ \Omega_u = \begin{bmatrix} 3812{,}370(317{,}334) & & & \\ \text{-}97{,}206(80{,}376) & 147{,}524(32{,}684) & & \\ \text{-}129{,}233(30{,}334) & 4{,}478(9{,}117) & 26{,}842(4{,}958) & \\ \text{-}382{,}448(40{,}736) & 4{,}766(11{,}390) & \text{-}0{,}943(4{,}444) & 72{,}668(7{,}535) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ijk} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}(0,\ \Omega_e) \ :\ \Omega_e = \begin{bmatrix} 3589{,}415(30{,}025) \end{bmatrix}$$

$$\text{-}2{*}loglikelihood(IGLS) = 367259{,}500(32933 \text{ of } 40925 \text{ cases in use})$$

Figura 30. Estimación final del modelo en tres niveles.

La interpretación de los efectos aleatorios se haría en los mismos términos vistos en páginas anteriores.

4.4. La razón de verosimilitud

Comparación con el modelo nulo

Para comparar el modelo final con el modelo nulo se procederá del mismo modo que se hizo en el capítulo anterior con el modelo de dos niveles.

El valor de la razón de verosimilitud obtenido en la estimación (-2**loglikelihood (IGLS)* = 367259.500) nos permite conocer si el modelo propuesto de tres niveles es mejor o peor que el modelo nulo. Esta información facilita la decisión acerca de la aceptación o rechazo de los datos conseguidos con la estimación de los parámetros.

Como ya vimos, para estudiar la diferencia entre ambos modelos es preciso restar el valor del logaritmo obtenido en el modelo nulo (459869.700) al obtenido en el modelo definitivo (367259.500). El valor resultante es 92610.2, lo que indica la cuantía de la reducción del valor del estadístico de ajuste del modelo definitivo. Seguidamente, se deben contar los parámetros del modelo definitivo, que son 23 (uno por cada parámetro estimado, que sería cada uno de los valores que el programa señala en verde) y le restamos los cuatro del modelo nulo; por tanto tendríamos 19 parámetros estimados.

Este número 92610.2 puede ser considerado un valor de χ^2 con 19 grados de libertad. Si tomamos este valor y realizamos la estimación correspondiente (en *Basic Statistic, Tail Areas* del programa MLwiN) obtenemos una probabilidad asociada de 0.000, lo que nos permite concluir que el modelo definitivo se ajusta mejor a los datos que el modelo nulo, por tanto, es superior en consistencia y ofrece información confiable y significativa.

CAPÍTULO V
CONSEJOS Y ESTIMACIÓN PRÁCTICA EN MLWIN

5. CONSEJOS Y ESTIMACIÓN PRÁCTICA EN MLWIN

Al llegar a este apartado, el lector estará motivado para realizar alguna práctica, y de esa forma poner a prueba sus conocimientos sobre el tema y tratar de observar con ejemplos concretos la capacidad explicativa de la metodología.

Antes de iniciar es conveniente tomar en cuenta ciertas consideraciones prácticas que no aparecen en los textos ni en las tutorías. Estos son elementos pequeños pero importantes, que permiten desenvolverse sin tropiezos en los modelos jerárquicos lineales.

Por otra parte, queremos recordar que este texto no es un manual de MLwiN, simplemente pretende hacer una breve aproximación práctica y expresar algunos elementos propios de nuestra experiencia que no se encuentran en las tutorías. Con el fin de acercar al lector en el empleo de este paquete estadístico. Para obtener detalles sobre todo el escritorio de MLwiN es necesario estudiar los manuales recomendados.

5.1. Consejos

a) Descargas del programa

Si no cuenta con el programa MLwiN, en la página http://www.ssicentral.com/hml/student/html facilitan una versión para estudiantes, con el final de realizar prácticas con los datos brindados por los autores.

b) Introducir la base de datos para MLwiN

Generalmente el software MLwiN es bastante cerrado para la comunicación con otros paquetes estadísticos, por esa razón, algunas bases de datos presentan problemas para introducirse en el programa MLwiN, sea de SPSS, Excel o txt. y por más que se realicen los procedimientos descritos en los manuales, casi siempre su inclusión es rechazada, perdiéndose con ello minutos preciosos de trabajo.

Para superar este inconveniente, lo más simple es copiar nuestra base, sea cual sea el programa de donde se haya elaborado, y pegarla en Excel. Luego usando las opciones “copiar” y “pegar” la trasladamos a MLwiN. El procedimiento para hacerlo es el siguiente: una vez pegada la base en Excel, la seleccionamos completa, la copiamos (Ctrl.+C) y luego abrimos MLwiN. Una vez en el programa, pegamos la base mediante la combinación de las teclas Ctrl.+V o con la secuencia Edit+Paste. Inmediatamente ejecutado este comando aparece una pantalla con nuestros datos.

También Gaviria y otros (1997, 2004 y 2005) recomienda utilizar la macro desarrollada por Snijders ver http://stat.gamma.rug.nl/snijders/ , pulsar en “multilevel analysis” y solicitar la macro PreML.inc

Pegada la base en el MLwiN, aparece una pantalla como la que presenta la Figura 31.

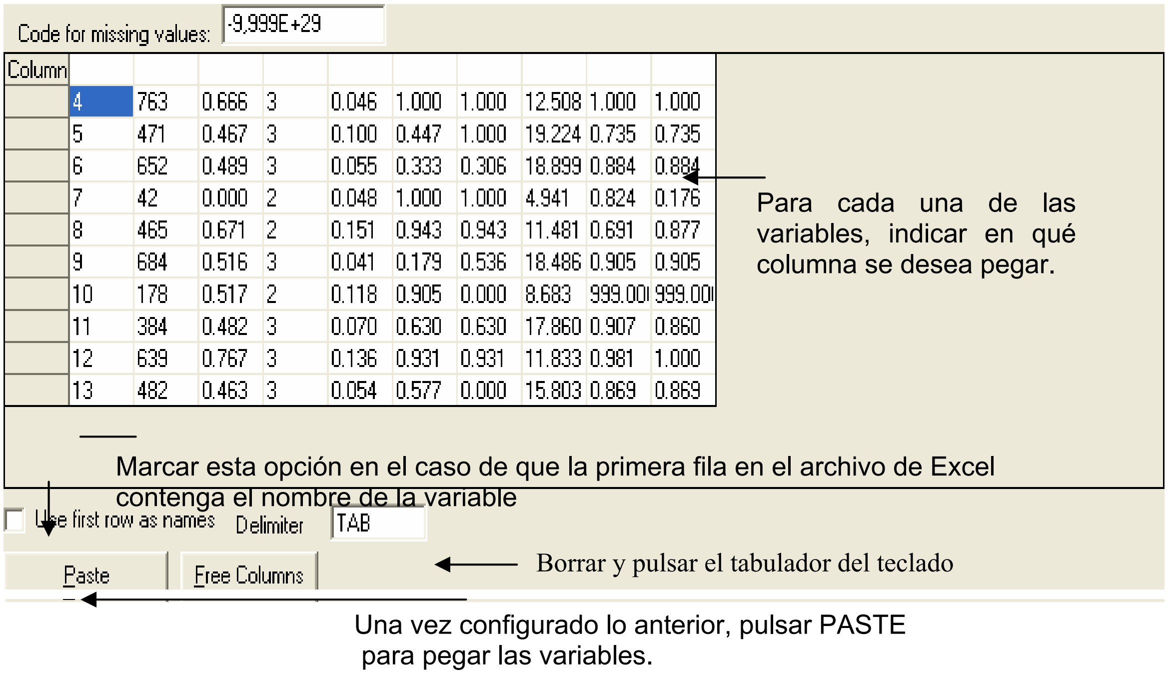


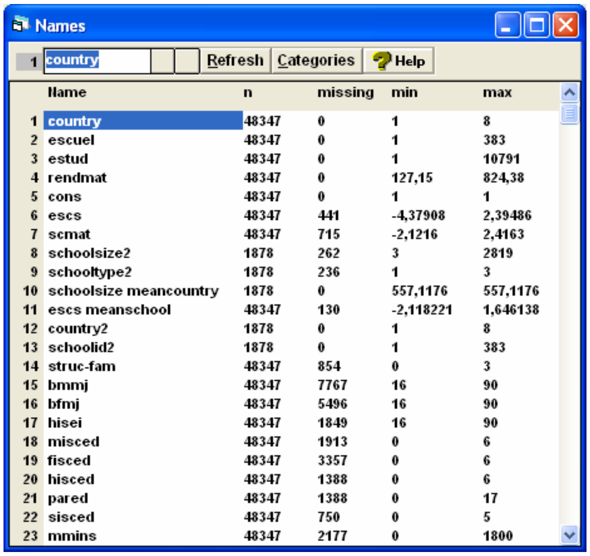
Figura 31. Base de datos en el MLwiN.

En el cuadro inferior izquierdo de esa pantalla se escribe DELIMITER, debemos borrar la palabra TAB y con el cursor parpadeando presionamos el tabulador de nuestra computadora. Aparecerá entonces nuevamente la palabra TAB. Seguidamente, hacemos clic en FREE COLUMNS para informar al programa donde serán introducidas las columnas de nuestra base de batos. Como paso final presionamos la palabra PASTE.

El procedimiento que hemos detallado, en algunos casos, es el más simple y permite ahorrar mucho tiempo tratando de agregar nuestra base al programa.

Si se desea ver la base introducida en el programa MLwiN debe ir a DATA MANIPULATION y seleccionar NAMES e inmediatamente aparecerá nuestro trabajo. Si se desea, se pueden asignar los nombres a cada una de las variables. Si estaban escritos en la primera fila de EXCEL, al pegarse en MLwiN, este programa mantendrá los nombres anteriores de las variables en los mismos lugares y con los mismos datos.

Si la base no cuenta con los nombres o usted quiere cambiarlos, selecciona la variable y en el sombreado azul se escribe el nombre correspondiente (ver Figura 32).



Seleccionando la variable en cuestión (que quedará sombreada en azul), se le asigna el nombre en el espacio reservado para ello y se acepta pulsando el botón.

Figura 32. Cambios en las variables.

c) Creación de la constante

El primer paso para iniciar el modelado de estructuras jerárquicas es la generación de una constante, con todos los valores ajustados a uno (1). Es un vector fijo utilizado para dar el mismo tratamiento al punto de corte y a las distintas pendientes del modelo. Si no se realiza este procedimiento, el programa MLwiN no va a proceder con la estimación y no se tendrá un modelo nulo para determinar la proporción de varianza sin explicar.

Uno de los diferentes procedimientos para generar la constante es el siguiente: seleccionar DATA MANIPULATION, y luego se escoge la opción CALCULATE. Aparece una ventana y dentro de ella, hay que situarse en cualquier columna libre, por ejemplo digamos la número veinte (C20). Además, supongamos que en la columna uno (C1) tenemos todos los sujetos del estudio, por ejemplo, una muestra de 8897. Entonces dentro de la ventana ofrecida por CALCULATE realizamos el siguiente cálculo:

$$C20=1+0*C1$$

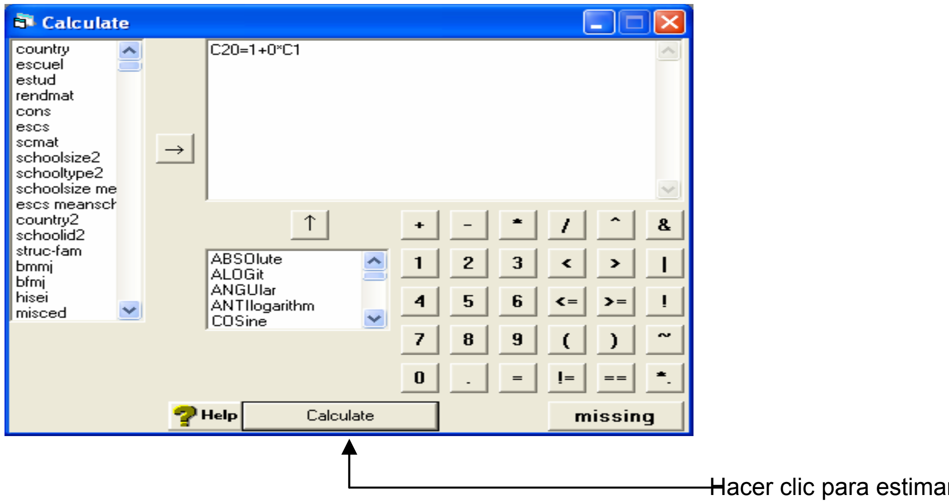


Figura 33. Creación de la constante.

Eso quiere decir que en la columna veinte tendremos todos los sujetos de la muestra, pero todos sus valores estarán ajustados a 1, o sea al valor de la constante. Puede verse la creación de la constante en la pantalla con la opción DATA MANIPULATION, seleccionando NAMES. Observa la columna veinte o la que hayas escogido para realizar el cálculo, puedes ver que tienen la cantidad de sujetos de la muestra y en min-max los valores de uno.

d) Recodificación de las variables

En la mayoría de los casos, los modelos jerárquicos lineales necesitan para sus estimaciones iniciar a partir del valor cero, por tanto, las variables independientes deben ser ajustadas a cero. Por ejemplo, tomamos una medida iniciando con 1, 2, 3, 4 y 5. Para estimarla en el modelo debemos recodificar la variable de la siguiente forma: 0 = 1, 1=2, 2=3, 3=4 y 4=5. De esa forma la medida quedaría a partir de cero y hasta el 4. Nótese que, es la misma cantidad de números pero ordenados a partir del cero.

Para realizar esta recodificación se hacen clic en DATA MANIPULATION-RECODE, y clic. Aparece una pantalla como la que presenta la Figura 34.

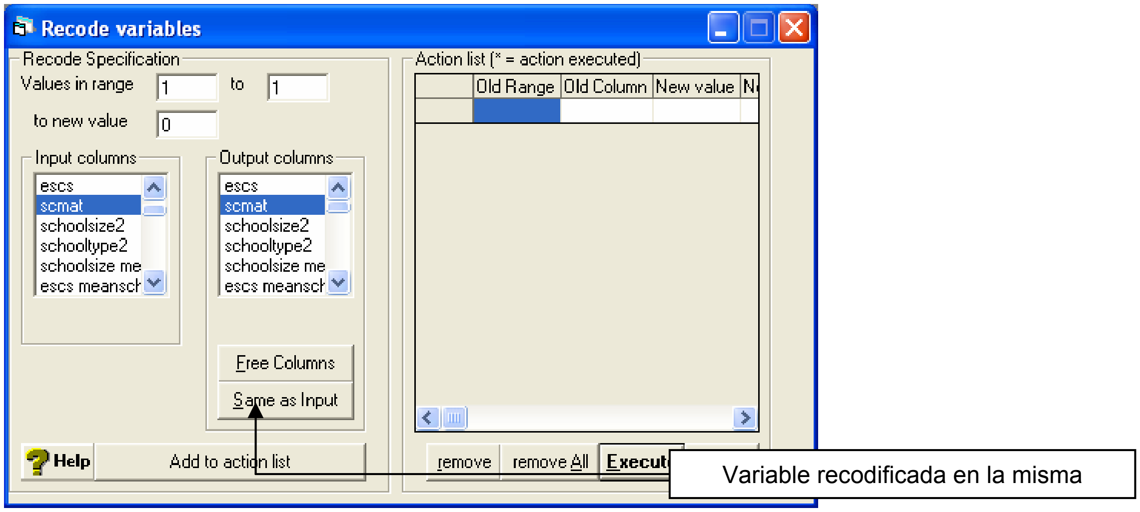


Figura 34. Recodificación de las variables (primer paso).

Seleccionar primero la variable a recodificar (INPUT COLUMNS) y luego la columna donde será colocada la nueva codificación, si es el caso puede hacer clic en SAME INPUT. Esto le indica al programa que debe colocar los datos recodificados en la misma columna de entrada. Seguidamente en VALUE IN RANGE se introduce el valor anterior, por ejemplo: de 1 hasta 1, TO NEW VALUE = 0. Ahora puede agregarla a la lista de acción por medio de ADD TO ACTION LIST.

Al añadir a la lista de acción, el valor pasa al lado derecho de la pantalla, informando sobre: a) el anterior valor, b) la columna de donde proviene, c) el valor recodificado y d) la columna de salida. Nuevamente, se puede volver a iniciar el proceso de recodificación hasta que sean incluidas todas las recodificaciones necesarias.

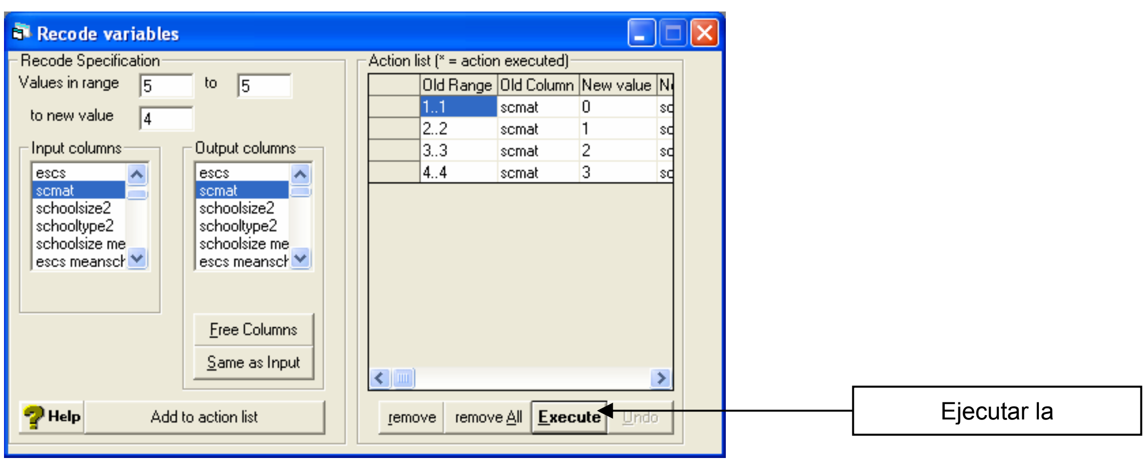
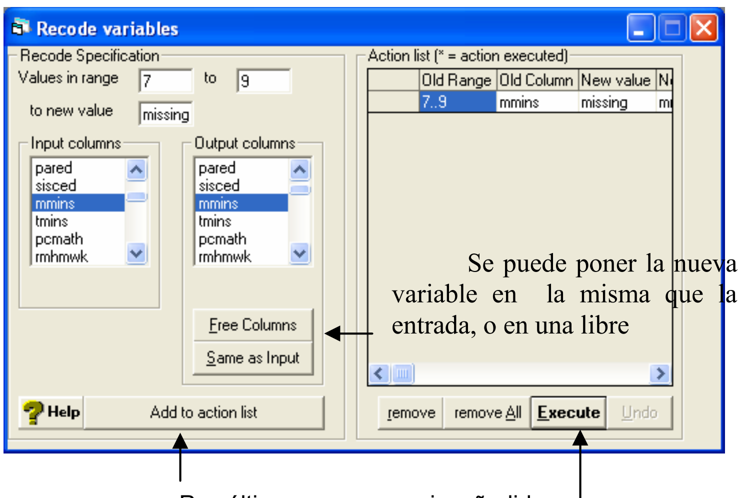


Figura 35. Remodificación de las variables (segunda parte).

El proceso concluye haciendo clic en EXECUTE. Como recomendación, si no estamos muy seguros del procedimiento de recodificación, vale la pena utilizar FREE COLUMNS, así el programa buscará una columna libre y no cambiará los datos de la columna de entrada inicial.

e) Recodificación de los valores perdidos.

Antes de empezar a trabajar, es necesario recodificar los valores perdidos en la base de datos. Para ello, basta saber los valores que se han asignado en la base original a esto y luego acceder a *Data Manipulation – Recode*



En primer lugar se especifican los valores perdidos de la variable original (*Values in range)* y a continuación se les recodifica como valores perdidos *missing* (to new value). Se indica la variable de entrada (*input column), y la de salida (*output)

Por último, es necesario añadirlo a la "lista de tareas" (*Add to action list*), y ejecutar la acción (*Execute)*

Figura 36. Remodificación de los valores perdidos.

f) Transformación de la variable en variables instrumentales

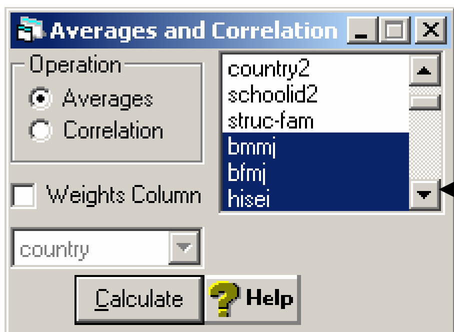
En caso de contar con variables categóricas es necesario convertirlas en variables "instrumentales" (n-1) para que el programa las estime como variables dicotómicas.

Para trasformar la variable categórica por las variables "instrumentales", se selecciona COMMAND INTERFACE, y aparecen dos pantallas. Se hace clic en el espacio abajo de la primera pantalla. Por ejemplo, tenemos una variable de cuatro categorías en la columna 5 (C5), entonces, en la parte inferior de la pantalla escribiremos: dumm c5 c21-c23

La INTERFACE divide las categorías de la columna C5 y las coloca en forma
simultánea en las columnas c21, c22 y c23.

g) Centrado de la variable

En ocasiones es necesario centrar la variable debido a las necesidades técnicas de nuestro estudio, para ello el primer paso debe ser conocer la media de la variable. Esto se hace con BASIC STATISTICS_ AVERAGE CORRELATIONS.



Se mantiene presionada la tecla ctrl. mientras se seleccionan las variables para estimar la medida

Figura 37. Centrado de la variable (primer paso).

Luego se seleccionan las variables a estimar y hace clic en Calculate. Aparece una ventana con las medias de las variables y su desviación estándar.

Una vez que se tenga la media hace clic en DATA MANIPULATION-CALCULATE y se define la variable a centrar utilizando la siguiente ecuación, por ejemplo C18=C18, la media estimada anteriormente. La ecuación significa que la variable de la C18 es igual a la misma variable, pero restando el valor de la media. Para el ejemplo hemos estimado una media con valor de 43,711.

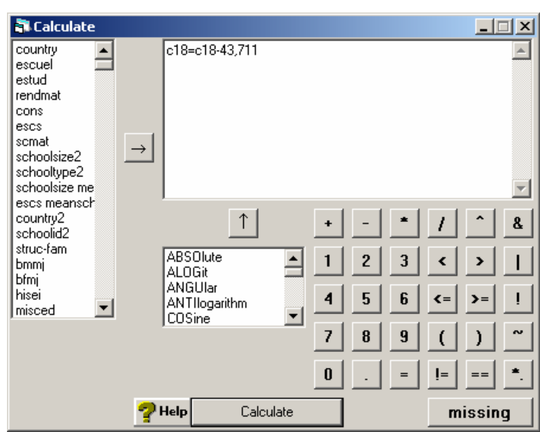


Figura 38. Centrado de la variable (segundo paso).

Hecha la ecuación, concluimos con el cálculo presionando CALCULATE. La variable centrada estará entonces en la casilla C18.

5.2. Estimación práctica en MLwiN

a) Elaboración del modelo nulo

El primer paso es introducir la base de datos en el MLwiN (ver apartado 5.1.a. Consejos).

Realizado el procedimiento, señalamos en el escritorio del programa la palabra MODEL y hacemos clic en ECUATIONS, como se muestra en la Figura 39.

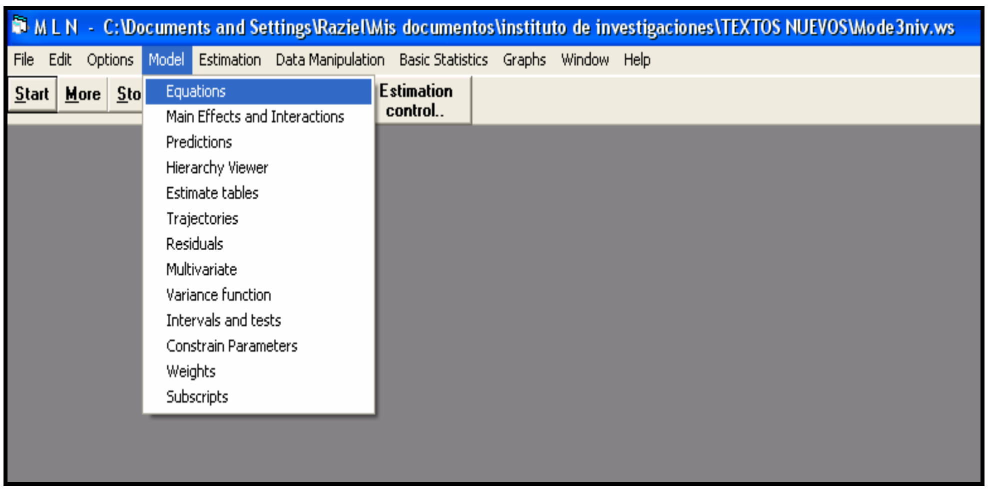


Figura 39. Elaboración del modelo nulo (primer paso).

Aparece la pantalla de la estructura básica de un modelo, con la ecuación inicial.

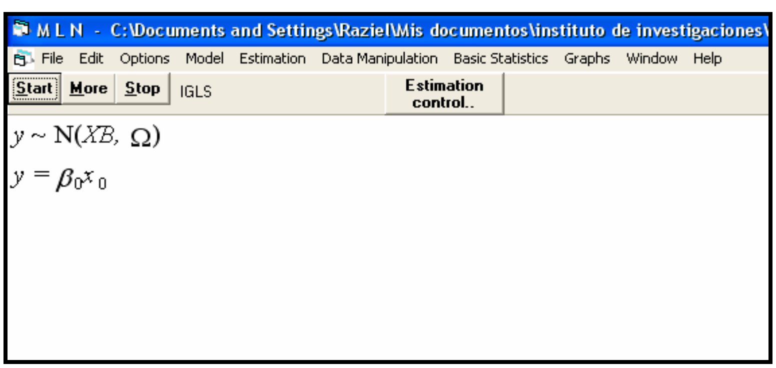


Figura 40. Elaboración del modelo nulo (segundo paso).

A continuación se debe especificar la variable dependiente y los niveles de nuestro modelo. Para ello se hace clic sobre la letra "y". Con ello aparece un cuadro determinado con dos elementos: 1) la variable dependiente y 2) el número de niveles del modelo.

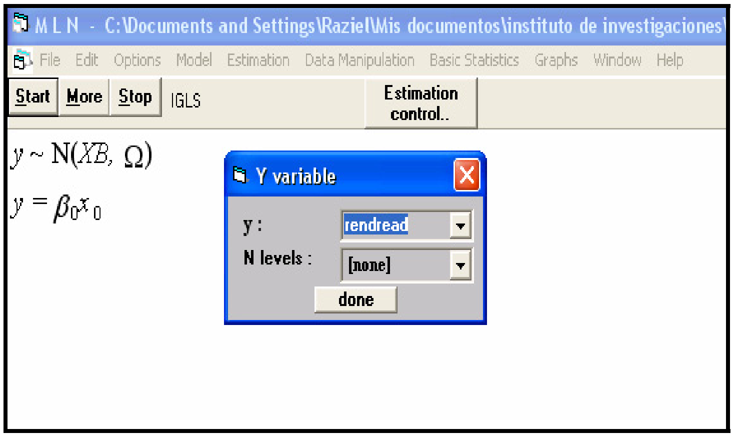


Figura 41. Elaboración del modelo nulo (tercer paso).

Al hacer clic sobre el primer cuadro se despliega un listado de variables del que hay que seleccionar la variable dependiente definida previamente por el investigador en su base de datos. Luego en NIVELES, se concreta el modelo, haciendo clic en la pestaña desplegable. Esta muestra cinco niveles jerárquicos, pero el investigador escoge el modelado a nivel deseado. En el ejemplo seleccionamos tres niveles.

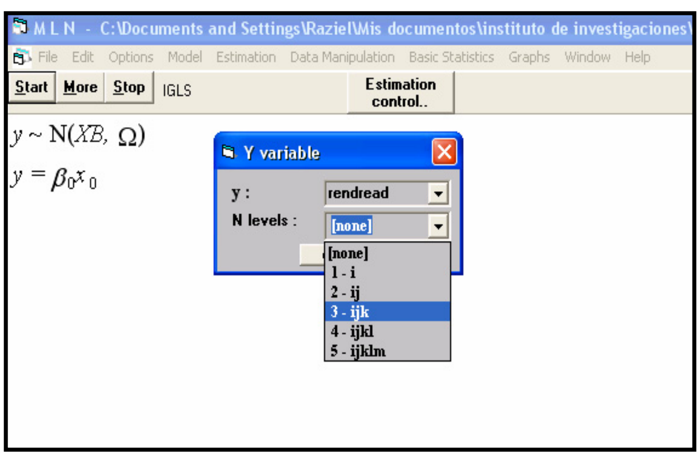


Figura 42. Elaboración del modelo nulo (cuarto paso).

Seleccionados la cantidad de niveles del modelo, automáticamente se despliegan otros cuadros para identificar la variable dependiente y las unidades macro del modelo. Con la pestaña desplegable se seleccionan y se pulsa DONE para cerrar el cuadro de diálogo. Nosotros en la base seleccionamos "country", "school" y "student"

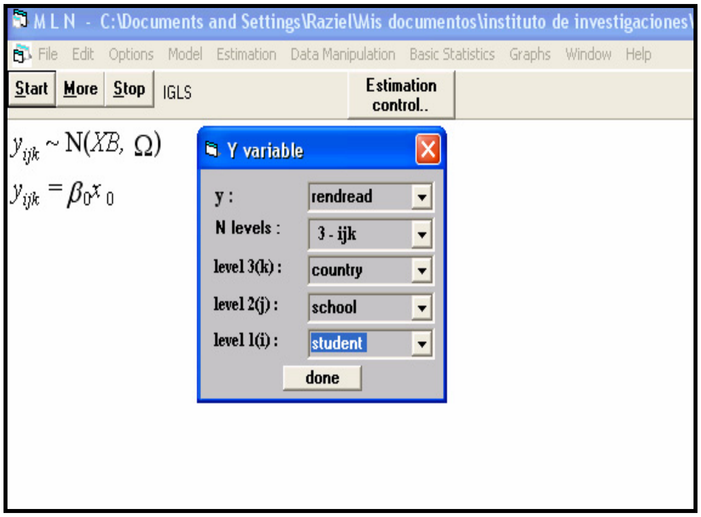
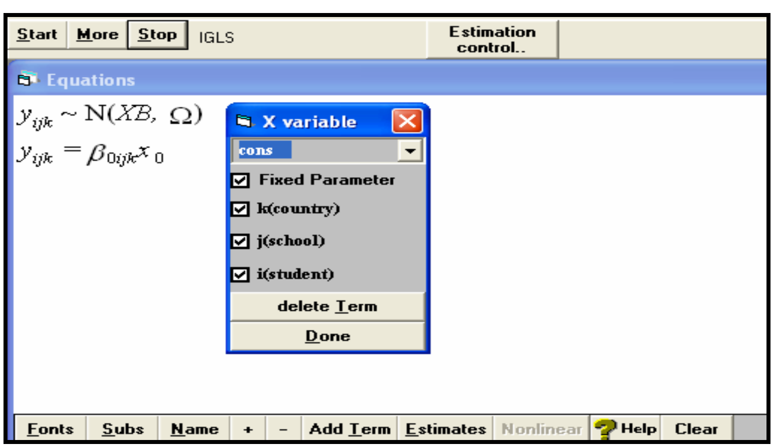


Figura 43. Elaboración del modelo nulo (quinto paso)

Ahora se debe introducir la constante, o sea, el intercepto de la ecuación (ver apartado 5.1.3. Consejos). Para ello hacemos clic sobre el "beta" cero y aparece una pantalla con pestañas desplegables. El primer paso es seleccionar la variable "constante" con la pestaña desplegable. Luego se define la parte fija (Fixed Parameter) y los sub índices del modelo: en este ejemplo sería "*i student*", *"j school"* y *"k country"* . En cada una de las casillas que aparecen marcamos al lado su verificación. Para finalizar se hace clic en DONE, y con ello queda elaborado el modelo nulo en sus parámetros fijo y aleatorio.

Ahí queda construido el modelo nulo, lo único que es necesario hacer ahora es estimarlo: presionar START.



Figu

Al presionar el cuadro START, el programa MLwiN procede a estimar los datos de nuestro estudio, ofreciendo una pantalla como la siguiente.

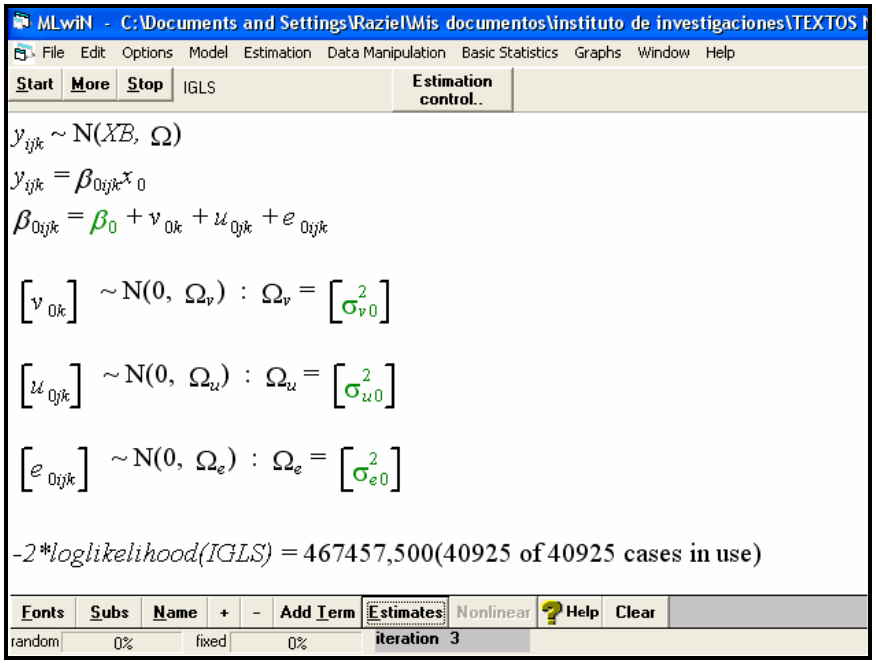


Figura 45. Elaboración del modelo nulo (sexto paso).

Para poder ver los resultados de las estimaciones de este modelo nulo, se hace clic dos veces en la parte inferior de la pantalla, donde dice ESTIMATES.

b) Inclusión de variables explicativas

Estimado el modelo nulo, se irán introduciendo las variables explicativas de los diferentes niveles haciendo clic sobre Añadir término (*Add Term*) en la parte inferior de la pantalla.

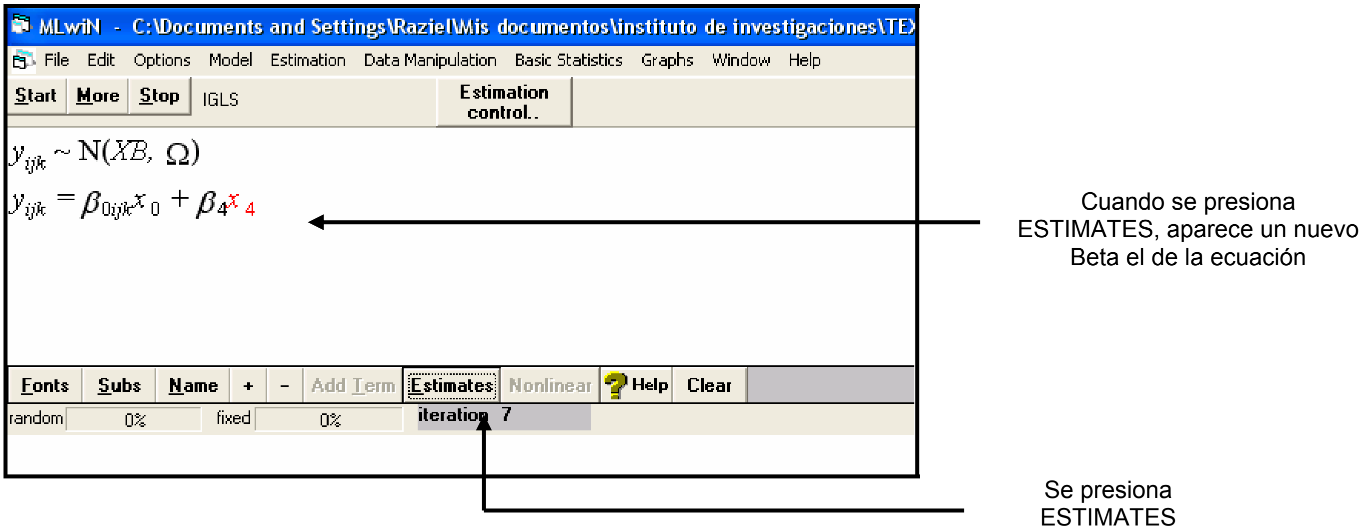


Figura 46. Inclusión de variables explicativas.

Sobre el nuevo beta o nuevo predictor, se debe hacer clic

c) Cambios de forma

Haciendo clic en Fuentes (*Fonts*) se cambiará el tipo de letra.

Haciendo clic en Subíndices (*Subs*) aparecerán/desaparecerán los subíndices asignados a cada nivel del modelo.

Haciendo clic en Nombres (*Names*) aparecerán/desaparecerán los nombres asignados a cada variable.

Haciendo clic en + o -, se mostrará mayor o menor detalle del modelo.

Haciendo clic en Estimación (*Estiamtes*) aparecerán/desaparecerán las estimaciones de los parámetros.

Al hacer clic en Ayuda (*Help*) se accede a la ayuda del programa.

Al hacer clic en Limpiar (Clear) se borrarán todas las especificaciones realizadas en la ventada de estimación.

d) Análisis del chi cuadrado para el ajuste del modelo

Para conocer y comparar el valor del χ^2 de un modelo de estudio, seleccionamos BASIC STATISTICS, haciendo clic en TAIL AREAS. En VALUE introducimos el número de la resta de los valores de la razón de verosimilitud (p.e.59018) y en DEGREES OF FREEDOM se introducen los grados de libertad (p.e.10, que se estiman a partir del número de parámetros estimados en el modelo). Una vez introducidos los datos hacemos clic en CALCULATE.

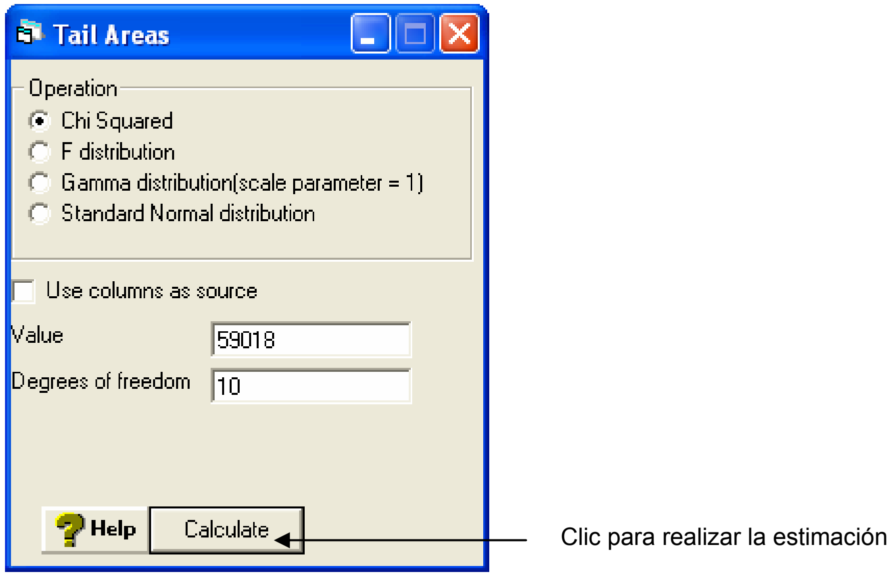


Figura 47. Análisis del chi cuadrado.

e) Estimación de los residuos

Los residuos pueden ser estimados señalando en el escritorio la palabra MODEL y luego RESIDUAL, como se muestra en la Figura 48.

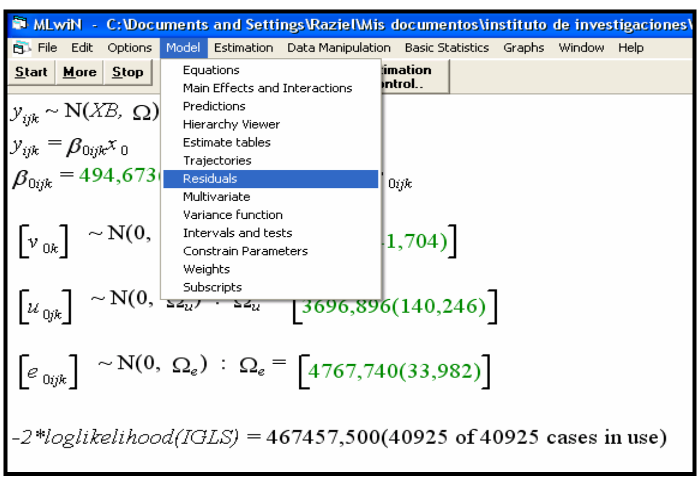


Figura 48. Estimación de los residuos (primer paso).

Seguidamente aparece una pantalla con dos pestañas SETTINGS y PLOTS. La primera define las columnas donde se colocarán los resultados. El programa las coloca de la C 300 a C308, salvo que usted señale lo contrario.

En esa ventana se hace clic en la parte inferior para seleccionar el nivel deseado de residuales, eso depende del número de niveles del modelo. En nuestro caso, escogimos las escuelas, pero bien puede ser los estudiantes o los países. Seguidamente presionamos CALC y ya contamos con los residuales en las casillas correspondientes.

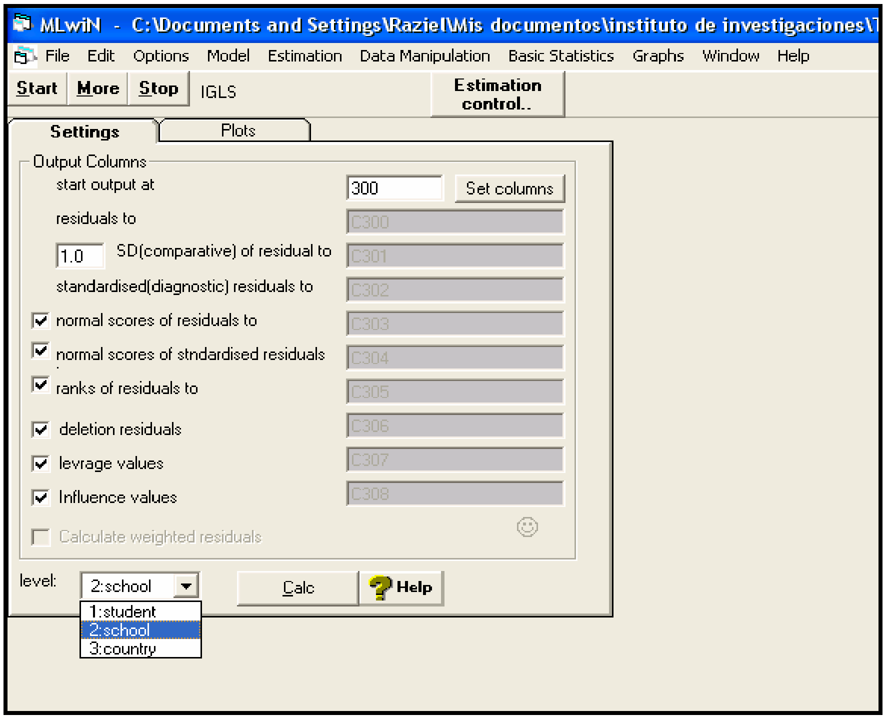


Figura 49. Estimación de los residuos (segundo paso).

Para graficar los residuales debemos tocar la pestaña PLOTS. Esta ofrece diferentes elementos relativos a los residuales. En esa pantalla se ofrecen diferentes tipos de información y de estimación de los residuales.

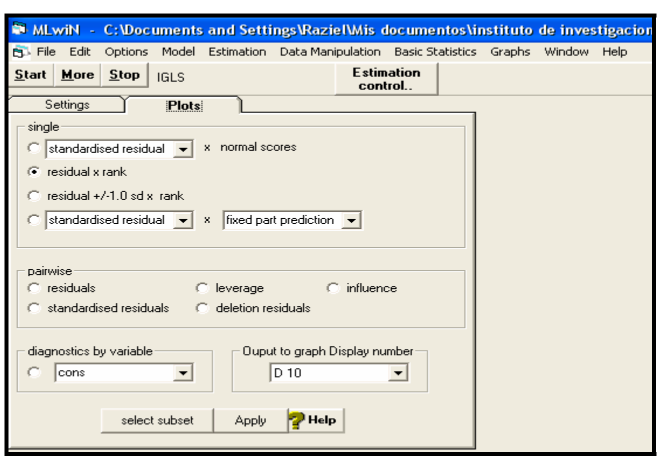


Figura 50. Estimación de los residuos (tercer paso).

Si nos interesa solamente los residuales x rango, hacemos clic en la parte inferior APPLY, y de inmediato aparecerá el gráfico correspondiente a las escuelas, o al nivel señalado con anticipación. En nuestro caso lo son las escuelas, o sea, el segundo nivel.

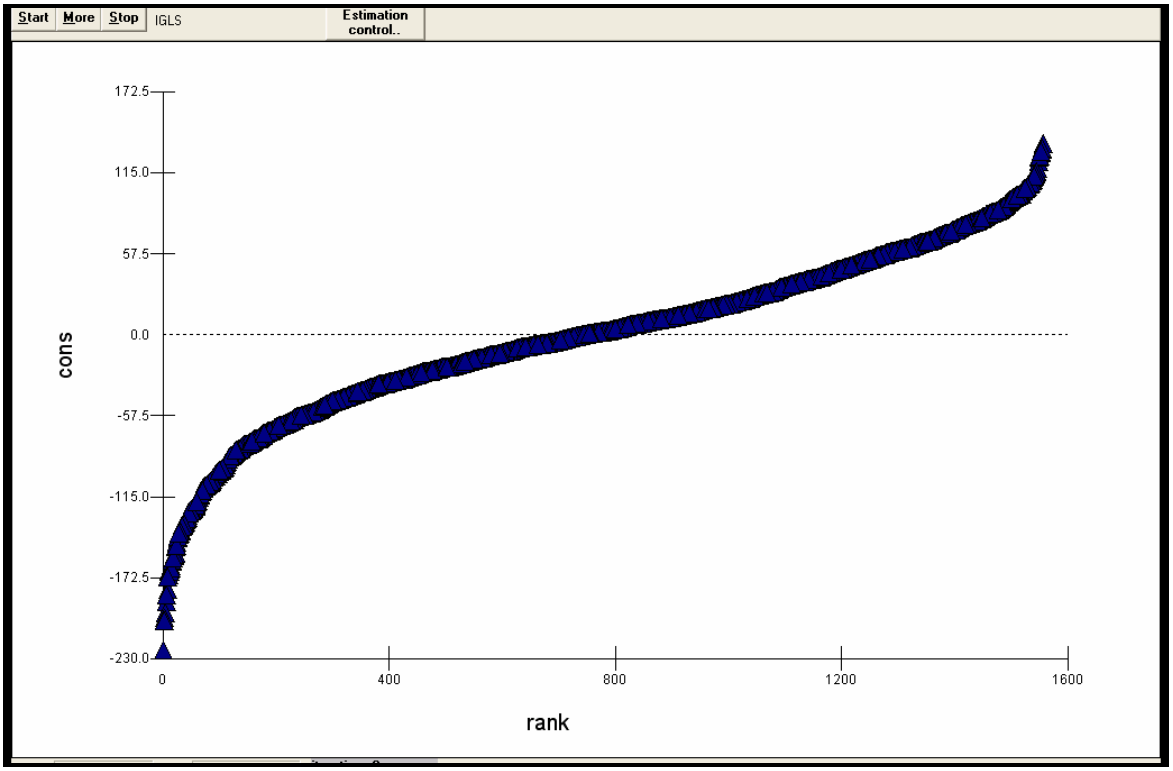


Figura 51. Gráfico de estimación de los residuos.

Este gráfico muestra el comportamiento de los residuos por cada escuela. Unas están encima de la media y otros por debajo de ella. Observamos que ciertas escuelas tienen un rendimiento muy por encima del normal y otras, por el contrario, muestran que lo tienen muy bajo.

CAPÍTULO VI
MODELOS JERÁRQUICOS LINEALES EN PÁGINAS WEB

6. LOS MODELOS JERÁRQUICOS EN PÁGINAS WEB

Sobre los modelos jerárquicos lineales, se encuentran en la red una amplia gama de sitios para apoyo, consulta e intercambios de los investigadores interesados en ampliar bibliografía, conocimientos y experiencias. Los mismos han sido diseñados por los profesores de más diversos centros de enseñanza europeos y norteamericanos, atraídos por la difusión y mejora de la metodología. En estos sitios cibernéticos, se pueden encontrar manuales de MLwiN, artículos sobre diversos temas, software gratuito para prácticas de estudio, bases de datos y otros componentes imprescindibles para el uso, aplicación y desarrollo de la metodología.

Sitio oficial de MLwiN:

http://multilevel.ioe.ac.uk/index.html

Revista:

http://multilevel.ioe.ac.uk/publref/newsletters.html

Foro de discusión y además, pueden encontrar otros sitios relacionados con la temática:

http://mathforum.org/library/view/4069.html

Los investigadores de la Universidad de Harvard en Estados Unidos:

http://www.fas.harvard.edu/~stats/survey-soft/hierarchical.html

Software de MLwiN versión de estudiantes:

http://www.ssicentral.com

Tutoría simple y rápida para el aprendizaje de MLwiN:

http://tramss.data-archive.ac.uk/documentation/MLwiN/tutorials.asp

Página del profesor Snijders, quien cuenta con una extensa bibliografía de estudios jerárquicos lineales:

http://stat.gamma.rug.nl/index.html

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aitkin, M., Anderson, D., & Hindle, J. (1981). Statistical modelling of data on teaching styles. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 144 (4), 419- 461.

Albander, J. M., & Goldstein, H. (1992). Multilevel statistical models in studies of periodontal diseases. *Journal of Periodontology*, *23*, 690-695.

Barnett, R.C., Raudenbush, S.W., Brennan, R.T., Pleck, J.H., & Marshall, N.L. (1995). Change in marital experiences and change in psychological distress: A longitudinal study of dual-earner couples. *Journal of Personality and Social Psychology*, *69* (5), 839-850.

Barnett, R.C., Marshall, N.L., Raudenbush, S.W., & Brennan, R. (1993). Gender and the relationship between job experiences and psychological distress: A study of dual-earner couples. *Journal of Personality and Social Psychology*, *64* (5), 794-806.

D. R., Bock (Ed.) (1989). *Multilevel Analysis of Educational Data*. San Diego: Academic Press.

Bryk, A.S. & Raudenbush, S.W. (1992). *Hierarchical Linear Models.* Newbury Park, Ca.: Sage.

Bryk, A.S., Raudenbush, S.W., Seltzer, M., & Congton, R. (1988a). *An Introduction to HLM: Computer Program and User's Guide* (2 ed.). Chicago: University of Chicago Department of Education.

Bryk, A.S., Thum, Y.M., Easton, J.Q., & Luppescu, S. (1998a). *Academic Productivity of Chicago. Public Elementary Schools*. Consortium on Chicago School Research.

De Leeuw, J., & Kreft, I.G.G. (1986). Random Coefficient Models for Multilevel Analysis. *Journal of Educational Statistics, 11*, 57-85.

Dempster, A., Laird, N., & Rubin, D. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B (*39*), 1-8.

Dempster, A., Rubin, D., & Tsutakawa, R.K. (1981). Estimation in covariance components models. *Journal of the American Statistical Association*, *76*, 341-353.

Duncan, G.J., & Raudenbush, S.W. (1998). Assessing the effects of context in studies of child and youth development. *Educational Psychologist*, *34* (1), 29-41.

Elston, R.C., & Grizzle, J.E. (1962). Estimation of time response curves and their confidence bands. *Biometrics*, *18*, 148-159.

Etxeberria, J. (1999). *Regresión Múltiple.* Madrid: Editorial La Muralla.

Fletcher, J.M., et al. (1991). Neurobehavioral outcomes in diseases of childhood: Individual change models for pediatric human immune viruses. *American Psychologist*, *46*.

Gaviria, J.L., & Castro, M. (2005). *Modelos Jerárquicos Lineales*. Madrid: Editorial La Muralla.

Gaviria, J., Martínez, R., & Castro, M. (2004). Un estudio multinivel sobre los factores de eficacia escolar en países en desarrollo: el caso de los recursos en Brasil. *Education Policy Analysis Archives*, *12*(20). Recuperado el 18 julio del 2004 de http://epaa.asu.edu/epaa/v12n20/.

Gaviria, J.L., Martínez, R., Castro, M., & Murillo, J. (1997). Un estudio multinivel del rendimiento académico de los escolares brasileños de 8ª serie 1er Grau y 3ª serie 2º Grau, en matemáticas y portugués. Universidad Complutense de Madrid. 1997

Goldstein, H. (1987a). *Multilevel Models In Educational And Social Research*. London, Griffin; New York, Oxford University Press.

Goldstein, H. (1987b). Multilevel covariance component models. *Biometrika*, 74, 430-431.

Goldstein, H. (1995). *Multilevel Statistical Models* (2nd. ed.) London: Edward Arnold.

Goldstein, H. (2003). *Multilevel Statistical Models* (3a ed.) London: Hodder Arnold.

Goldstein, H. (2004). Heroscedasticity and complex variation. *Encyclopedia of Behavioural Statistics*. London.

Goldstein, H., & Healy, M.J.R. (1995). The graphical presentation of a collection of means. *Journal of Royal Statistical Society*,*158*, 175-177.

Goldstein, H., Healy, M.J.R., & Rasbash, J. (1994). Multilevel time series models with applications to repeated measures data. *Statistics in Medicine*, *13*, 1643-1655.

Goldstein, H., & Rasbash, J. (1996). Improved approximations for multilevel models with binary responses". *Journal of the Royal Statistical Society*, *159*, 505-514.

Goldstein, H., et al. (1993). A multilevel analysis of school examination results. *Oxford Review of Education*,*19*, 425-433.

Guillén, M.F. (1992). *Análisis de Regresión Múltiple*. Cuadernos Metodológicos Nº 4. CIS. Madrid: Closas-Orcoyen.

Hair, J., Anderson, R., Tatham, B., & Black, W. (1999). *Análisis Multivariante*. España: Prentice Hall

Hill, P.W., & Goldstein, H. (1998). Multilevel modelling of educational data with cross classification and missing identification of units. *Journal of Educational and Behavioural Statistics*, *23*, 117-128.

Hox, J.J. (1995c). *Applied Multilevel Analysis*. Amsterdam: TT-Publikaties

Kasim, R., & Raudenbush, S. (1998). Application of Gibbs sampling to nested variance components models with heterogenous with-in group variance. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *23*(2), 93-116.

Kindlon, D.J., Wright, B.D., Raudenbush, S.W., & Earls, F. (1996). The measurement of children's exposure to violence: A Rasch analysis. *International Journal of Methods in Psychiatric Research*, *6*, 197-194.

Kreft, I., & De Leeuw, J. (1998). *Introducing Multilevel Modelling*. London: Sage.

Laird, N.M., & Ware, H. (1982). Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, *38*, 963-974.

A, Leyland, & H, Goldstein (Eds.) (2001). *Multilevel Modelling of Health Statistics*. London: John Wiley.

Leyland, A.H.; Langford, I.H., Rasbash, J. & Goldstein, H. (2000). Multivariate spatial models for event data. *Statistics in Medicine*, *19*, 2469-2478. Recuperado el 22 agosto 2001 en http//:www.interscience.wiley.com/jpages/0277-6715.

Lindley, D.V., & Smith, A.F.M. (1972). Bayes estimates for the linear model. *Journal of the Royal Statistical Society*, Serie B (*34*), 1-41.

Longford, N. (1987). A fast scoring algorithm for maximum likelihood estimation in unbalanced mixed models with nested random effects. *Biometrika*, *74* (4), 817-827.

Longford, N. (1988). Fisher scoring algorithm for variance component analysis of data with multilevel structure. En R.D. BOCK (Ed.) *Multilevel Analysis of Educational Data* (pp. 297-310). Orlando, Florida: Academic Press.

Longford, N. (1993). *Random Coefficient Models*. Oxford: O.U.P.

Mason, W.M., Wong, G.M., & Entwisle, B. (1983). Contextual analysis through the multilevel linear models. In S. Leinhardt (Ed.), *Sociological methodology* (pp. 72-103). San Francisco: Jossey Bass.

Mason, W.M., Anderson, A.F., & Hayat, N. (1988). *Manual for GENMOD*. Ann Arbor: University of Michigan, Population Studies Center.

Mortimore, P., Sammons, P., Stoll, L., Lewis, D., & Ecob, R. (1988). *Schools Matters*. Berkeley, C.A.: University of California Press.

Pebley, A., Goldman, N., & Rodríguez, G. (1996). Prenatal and Delivery Care and Childhood Immunization in Guatemala: Do Family and Community Matter? *Demography*, *33*(2), 231-247.

Plewis, I. (1997). *Statistics in Education.* London: Edward Arnold

Plewis, I. (1998). *Multilevel Models*. *Social Research Update*, *23*. Recuperado el 21 enero del 2001 en http://www.soc.surrey.ac.uk/sru/SRU23.html

Rasbash, J., Browne, W., Goldstein, H., & Yang, M.(2000a). *A user's guide to MLwiN* (2 ed.). London: Institute of Education.

Rasbash, J., Browne, W., Healy, M., Cameron, B., & Charlton, C. (2000a). *MLwiN. Version 1.10.0006*. London: Multilevel Models Project Institute of Education.

Rabash, J., Prosser, R., & Goldstein, H. (1989). *ML2 Software For Two- Level Analysis User's Guide*. London: University of London Institute of Education.

Raudenbush, S.W. (1997). Statistical analysis and optimal design for cluster randomized trials. *Psychological Methods*, *2*(2), 173-185.

Raudenbush, S.W. (1999). Hierarchical models. In S. Kotz, (Ed.), *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Volume 3, (pp. 318-323). New York: John Wiley.

Raudenbush, S., & Bhumirat, C. (1992). The distribution of resources for primary education and its consequences for educational achievement in Thailand. *International Journal of Educational Research*, 143-164.

Raudenbush, S.W., Bhumirat, C., & Kamali, M. (1992). Predictors and consequences of primary teachers' sense of efficacy and students' perceptions of achievement in Thailand. *International Journal of Educational Research*, *17* (2), 165-177.

Raudenbush, S.W., & Bryk, A.S. (2002). *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods* (2ed.). Newbury Park, CA: Sage.

Raudenbush, S.W., Eamsukkawat, S., Di-Ibor, I., Kamali, M., & Taoklam, W. (1993a). On the job improvement in teacher competence: Policy options and their effects on teaching and learning in Thailand. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *15* (3), 279-297.

Raudenbush, S.W., Rowan, B., & Cheong, Y.F. (1992b). Contextual effects on the self-perceived efficacy of high school teachers. *Sociology of Education*, *65*, 150-167.

Raudenbush, S.W., Rowan, B., & Cheong, Y.F. (1993b). The pursuit of higher-order instructional goals in secondary schools: Class, teacher, and school influences. *American Educational Research Journal*, *30* (3), 523-553.

Raudenbush, S.W., & Sampson, R. (1999). Ecometrics: Toward a science of assessing ecological settings, with application to the systematic social observations of neighborhoods. *Sociological Methodology*, *29*, 1-41.

Rosenberg, B. (1973). Linear regression with randomly dispersed parameters. *Biometrics, 60,* 61-75.

Rowan, B., Raudenbush, S., & Cheong, Y. (1993). Teaching as a non-routine task: Implications for the organizational design of schools. *Educational Administration Quarterly*, *29*(4), 479-500.

Rowan, R., Raudenbush, S., & Kang, S. (1991). Organizational design in high schools: A multilevel analysis. *American Journal of Education*, *99*(2), 238-266.

Sammons, P., Nuttall, D., & Cuttance, P. (1993). Differential school effectiveness: results from a reanalysis of the Inner London Education Authority's junior school project data. *British Educational Research Journal*, *19*, 381-405.

Sampson, R.J., Raudenbush, S.W., & Earls, F. (1997). Neighborhoods and violent crime: A multilevel study of collective efficacy. *Science*, *277*, 918-924.

Selner-O'Hagan, M.B., Kindlon, D.J., Buka, S.L., Raudenbush, S.W., & Earls, F.J. (1998). Assessing Exposure to Violence in Urban Youth. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*, *39* (2), 215-224.

Smith, A.F.M. (1973). A general Bayesian linear model. *Journal of the Royal Statistical Society*, series B (*35*), 61-75.

Stuffebleam, D., & Sanders, J. (1990). Using The Personnel Evaluation Standars to Improve Teacher Evaluation. Millman & Darling-Hammond, (Eds.), *The New Handbook Of Teacher Evaluation*. London: Sage.

Ting, K.F. (2001). A Multilevel Perspective On Student Ratings of Instruction: Lessons From the Chinese Experience. *Research in Higher Education*. 41 (5), 637-653.

Van den Eeden, P., & Hüttnes, H.J.M. (1982). Multilevel research. *Current Sociology*, *30* (3), 1-181.

Worthen, B.R., & Sanders, P. (1987). *Educational Evaluation: Theory and Practice*. Charles A. Jones Publication, Wadsworth Publishing Company, Inc. 1987.